Probabilidad: Una Ingeniería Didáctica para el desarrollo del pensamiento estocástico, en el primer año de la Enseñanza Secundaria

Aportes desde un estudio de caso

UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN MARTÍN – ESCUELA DE HUMANIDADES ESPECIALIZACIÓN EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS EXPERIMENTALES Y MATEMÁTICA – TRABAJO DE INVESTIGACIÓN FINAL PARA LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE ESPECIALISTA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS EXPERIMENTALES Y MATEMÁTICA BAJO LA DIRECCIÓN DE FERRAGINA ROSA ANA– AÑO 2016.

LIC. GÜERCI VICTORIA PAMELA.

UNSAM
UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN MARTÍN

Probabilidad: Una Ingeniería Didáctica para el desarrollo del pensamiento estocástico, en el primer año de la Enseñanza Secundaria

GÜERCI, VICTORIA PAMELA

victoriaguerci@gmail.com

Dirigida por: FERRAGINA, ROSA ANA

AÑO: 2016

TRABAJO DE INTEGRACIÓN FINAL PARA LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE ESPECIALISTA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS EXPERIMETNALES Y MATEMÁTICA

Agradecimientos

En el plano personal les agradezco a: Norma Beatriz Fiorillo, mi madre, que desde pequeña me inculcó el amor por la docencia; a Luis Daniel Güerci, mi padre, que siempre estimuló mis estudios universitarios; a mis hermanos: Carolina Valeria Güerci y Federico Patricio Güerci, que han dedicado su tiempo en ayudarme a preparar material didáctico y me alentaron en todo momento; y a mi pareja, Franco Orsi, que supo comprender las horas que dediqué a la lectura y al trabajo de campo.

En lo laboral a Stella Maris Menéndez por abrirme las puertas del Instituto La Salle Florida y ser mi guía en el trabajo cotidiano, enseñándome a trabajar en equipo junto a otros docentes y a los adolescentes.

A cada uno de mis alumnos/as en estos primeros cinco años de trabajo dentro de las escuelas secundarias y universidades, por ser la inspiración de cada día y permitirme acompañarlos en un tramo de su formación.

En cuanto a mi trayecto formativo al Mg. Héctor Pedrol por articular todos los medios necesarios para que pueda realizar con éxito la cursada de la especialización, y al plantel docente, especialmente a la Mg. Gemma Fioriti y al Dr. José Villella que en cada clase compartieron en forma humilde sus saberes. Particularmente a la Lic. Rosa Ana Ferragina, dado que sin su acompañamiento continúo, su lectura atenta de cada palabra y los aportes de lecturas no hubiera podido realizar este trabajo.

En el mismo plano, a mis compañeros/as de cursada, porque en la diversidad de intereses supieron construir gratas y enriquecedoras jornadas de formación. Quiero mencionar particularmente a Carlos Einisman y Stella Zucco con quienes sigo compartiendo espacios e inquietudes.

Finalmente, al personal de la Biblioteca Central de la UNSAM porque siempre estuvieron dispuestos a ayudarme en la búsqueda de información académica consolidada, y me brindaron herramientas que facilitaron mi formación y la confección del presente trabajo.

Tabla de contenido

Delimitación y presentación del tema

La acción escolar se encuentra determinada, entre varios factores, por una propuesta educativa, que implica una acción social. De manera tal que un cambio sustancial en la sociedad exige un cambio de igual índole en los procesos educativos, es decir, el currículum es siempre producto de la historia y de una realidad humana y social, por lo que manifiesta las ideas y valores de la sociedad que lo elabora y lo lleva a la práctica (Chevallard, 1998). En el caso particular de la Argentina en el año 2006 la Ley de Educación Nacional, Nº 26.206, estableció, que “el Estado Nacional fija la política educativa y controla su cumplimiento con la finalidad de consolidar la unidad nacional, respetando las particularidades provinciales y locales” (Ley 26.206, 2006). En su artículo 16 instauró que:

> La obligatoriedad escolar en todo el país se extiende desde la edad de cinco (5) años hasta la finalización del nivel de la Educación Secundaria. El Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología y las autoridades jurisdiccionales competentes asegurarán el cumplimiento de la obligatoriedad escolar a través de alternativas institucionales, pedagógicas y de promoción de derechos, que se ajusten a los requerimientos locales y comunitarios, urbanos y rurales, mediante acciones que permitan alcanzar resultados de calidad equivalente en todo el país y en todas las situaciones sociales. (Ley 26.206, 2006, art. 16).

En consonancia con esto resulta primordial garantizar una escuela inclusiva, y para ello en el cotidiano de las instituciones se deben pensar y *re*pensar los desafíos de la inclusión y la calidad educativa en la secundaria obligatoria, y en consecuencia *analizar el recorrido que los alumnos/as realizan en su interior* (Montesinos, Pascual, & Sinisi, 2009). Dichos recorridos escolares interpelan nuestra tarea docente, haciéndonos notar que el centro de nuestra actividad educativa son los aprendizajes de los jóvenes y adolescentes. En el caso particular de los procesos de enseñanza y de aprendizaje de la matemática escolar es la Didáctica de la Matemática como ciencia social quien debe dedicarse al estudio de la mejora del hecho educativo en el que con explícita intencionalidad el docente pretende enseñar matemática a sus alumnos/as.

El presente trabajo, desarrollado como publicación final para la aprobación del posgrado Especialización en Enseñanza de las Ciencias Experimentales y Matemática dictado por la Universidad Nacional de San Martín, se propone presentar, desde la Didáctica de la Matemática, una ingeniería didáctica que introduzca la enseñanza de la Probabilidad enmarcada en el eje Probabilidad y Estadística en el Ciclo Básico de la Educación Secundaria de la provincia de Buenos Aires, para ello se indagará previamente en los distintos aspectos didácticos, psicológicos e históricos de las nociones presentes en dicho eje.

Formulación del problema de investigación

La escuela, lugar de diálogo entre generaciones en torno de los saberes, se constituye como lugar de relación. Esta relación pedagógica es sumamente rica y compleja. En ella están implicados el docente y el alumno/a como personas cuya relación le confiere dicha identidad; y los saberes y los conflictos sociales, cuyo conocimiento y transformación es lo que convoca la relación. La finalidad de dicha relación es la transformación de las personas para la transformación social. Así, lo pedagógico, la enseñanza y el aprendizaje son el quehacer primero de toda institución educativa.

En la Argentina, dicho quehacer se encuentra prescripto por los documentos curriculares, que indican no sólo aquellos contenidos a enseñar sino los modos de hacerlo. A nivel nacional los Núcleos de Aprendizaje Prioritarios (NAP) son quienes en primera instancia indican el:

> (...) conjunto de saberes centrales, relevantes y significativos, que incorporados como objetos de enseñanza, contribuyan a desarrollar, construir y ampliar las posibilidades cognitivas, expresivas y sociales

que los niños ponen en juego y recrean cotidianamente en su encuentro con la cultura, enriqueciendo de ese modo la experiencia personal y social en sentido amplio. (Ministerio de Educación & Consejo Federal de Educación, 2011, Acerca del sentido de los Núcleos de Aprendizajes Prioritarios, párr. 1).

Es decir que los NAP se configuran como organizadores de la enseñanza orientada a promover múltiples procesos de construcción del conocimiento en un año y/o ciclo escolar. Para el Ciclo Básico de la Educación Secundaria dichos núcleos de aprendizaje fueron formulados según los siguientes criterios:

- Su presencia se considera indispensable, pues se trata de modos de pensar o actuar fundamentales desde el horizonte de las condiciones de igualdad y equidad.
- Como saberes clave, refieren a los problemas, temas, preguntas principales de las áreas/ disciplinas y a sus formas distintivas de descubrimiento/ razonamiento/ expresión, dotadas de validez y aplicabilidad general.
- Son relevantes para comprender y situarse progresivamente ante problemas, temas y preguntas que plantea el mundo contemporáneo en que los niños se desenvuelven.

Son una condición para la adquisición de otros aprendizajes en procesos de profundización creciente. (Ministerio de Educación & Consejo Federal de Educación, 2011, Acerca del sentido de los Núcleos de Aprendizajes Prioritarios, párr. 3).

Cabe destacar que tanto el uso de los métodos estadísticos como de los modelos probabilísticos es una práctica común en todas las disciplinas científicas, dado que permiten la observación, recolección, organización y análisis de datos para realizar juicios inteligentes y tomar decisiones informadas en la presencia de incertidumbre o variación, por lo que cumplen los criterios de selección a los que son sometidos los contenidos que forman parte de los NAP. Es por ello que en el documento elaborado conjuntamente entre el Ministerio de Educación y el Consejo Federal de Educación (2011) se prescriben los núcleos sintetizados en la siguiente tabla:

EN RELACIÓN CON LA PROBABILIDAD Y LA ESTADÍSTICA	
Año	**Núcleos de Aprendizajes Prioritarios**
1° / 2°	• La interpretación y elaboración de información estadística en situaciones problemáticas que requieran: ○ organizar conjuntos de datos discretos y acotados para estudiar un fenómeno, comunicar información y/o tomar decisiones, analizando el proceso de relevamiento de los datos; ○ identificar diferentes variables (cualitativas y cuantitativas), organizar los datos y construir gráficos adecuados a la información a describir; ○ interpretar el significado de la media y el modo para describir los datos en estudio. • El reconocimiento y uso de la probabilidad como un modo de cuantificar la incertidumbre en situaciones problemáticas que requieran: ○ comparar las probabilidades de diferentes sucesos incluyendo casos que involucren un conteo ordenado sin necesidad de usar fórmulas; ○ determinar la frecuencia relativa de un suceso mediante experimentación real o simulada y compararla con la probabilidad teórica.

EN RELACIÓN CON LA PROBABILIDAD Y LA ESTADÍSTICA	
Año	**Núcleos de Aprendizajes Prioritarios**
2° / 3°	• La interpretación y elaboración de información estadística en situaciones problemáticas que requieran: ○ organizar datos para estudiar un fenómeno y/o tomar decisiones analizando el proceso de relevamiento de los mismos y los modos de comunicar los resultados obtenidos; ○ identificar diferentes variables (cualitativas y cuantitativas, discretas y continuas), organizar los datos para su agrupamiento en intervalos y construir gráficos adecuados a la información a describir; ○ interpretar el significado de los parámetros centrales (media, mediana y modo) y analizar sus límites para describir la situación en estudio y para la elaboración de inferencias y argumentos para la toma de decisiones. • El reconocimiento y uso de la probabilidad como un modo de cuantificar la incertidumbre en situaciones problemáticas que requieran: ○ explorar, producir y utilizar fórmulas sencillas de combinatoria para calcular probabilidades; ○ evaluar la razonabilidad de una inferencia elaborada considerando datos estadísticos obtenidos a partir de una muestra.

Consecuentemente, los Diseños Curriculares de los diferentes años de la Educación Secundaria de la Provincia de Buenos Aires (Gobierno de la Provincia de Buenos Aires & Dirección General de Cultura y Educación, 2006a, 2006b, 2008, 2010, 2011a, 2011b) prescriben, dentro del eje Probabilidad y Estadística, la enseñanza en forma gradual y progresiva de los siguientes contenidos:

Año	Núcleos Sintéticos de Contenidos
1°	• Fenómenos y experimentos aleatorios. • Estadística y probabilidad cualitativa.
2°	• Presentación de datos. Tablas y gráficos. • Medidas de tendencia central: media, mediana y moda. • Introducción a la combinatoria. • Fenómenos y experimentos aleatorios. • Probabilidad.
3°	• Estadística. Análisis descriptivo. • Combinatoria. • Probabilidad.

4°	• Combinatoria.
	• Binomio de Newton.
	• Probabilidad.
	  ○ Espacio muestral. Sucesos incompatibles e independientes.
	  ○ Probabilidad condicional.
	• Uso de calculadoras.

5°	• Estadística.
	  ○ Muestra y población
	  ○ Parámetros de posición
	  ○ Parámetros de dispersión
	• Uso de calculadoras

6°	• Distribución Normal • Distribución Binomial • Uso de calculadoras

Los documentos curriculares referenciados no sólo presentan un listado de contenidos a enseñar sino que explicitan una metodología de trabajo proponiendo a los docentes el desarrollo de experiencias y situaciones sustentadas en el razonamiento de los alumnos/as. En consonancia con esto, diversos didactas y matemáticos (Díaz Godino, Batanero Bernabéu & Cañizares Castellanos, 1988; Santaló, 1966) hablan sobre la necesidad de desenvolver una cultura probabilística[1] íntimamente relacionada con una cultura estadística. La probabilidad proporciona un modo de medir la incertidumbre, y en consecuencia *los modelos probabilísticos son el fundamento de la mayor parte de la estadística* (Díaz Godino et al., 1988), lo que implica desarrollar procesos de enseñanza y de aprendizaje de la probabilidad para un entendimiento de los métodos estadísticos. En sintonía con esto, Bell (1992) asegura que *el método estadístico es la matemática social por excelencia,* y lo pone en evidencia haciéndonos reflexionar sobre el modo en que diversas religiones del mundo profesan que un ser humano es tan libre como fue creado, llamando a esto *libre albedrío* y, sin embargo, la matemática establece que ciento treinta millones de individuos no son tan libres como uno solo. La humanidad como masa está gobernada por las leyes del azar. Para analizar y entender las reacciones de masas, sean éstas partículas subatómicas o grupos humanos, es menester comprender los métodos estadísticos (Bell, 1992).

Existen diversos motivos, además de los prescriptivos, que fundamentan la inclusión de los contenidos probabilísticos y estadísticos en el Nivel Secundario. Entre ellos se puede mencionar:

- La función práctica de la probabilidad y la estadística en los campos científicos, profesional y social.
- Los procesos de enseñanza de la probabilidad no necesitan de procedimientos complejos, dado que gracias a sus múltiples aplicaciones permite ser aplicada mediante una metodología heurística y activa, a través del planteamiento de

[1] La cultura probabilística hace referencia al conocimiento de los modelos matemáticos como el binomial, o los procesos de Poisson o la ley normal, y a ideas como la de distribución, entre otros conceptos abordados en el Nivel Secundario.

problemas y la realización de experimentos reales o simulados, siendo una fuente de matematización de problemas reales.

- El carácter exclusivamente determinista con el que se pretende enseñar matemática, intentando dar a los alumnos/as la sensación de que cada situación tiene una única solución cuantitativa medible, posible y verdadera. Sin embargo, esa impresión no es demasiado acertada, pues los problemas con los que se encontrarán a lo largo de su vida tendrán un carácter menos definido. Por lo que es importante que en la escuela se enseñe el carácter de la lógica probabilística, distinguiendo grados de incertidumbre, y enseñando a comparar predicciones con lo que realmente ocurre.
- La formación ciudadana, para que los juegos de azar (loterías, máquinas tragamonedas, bingos, ruletas, etc.), disfrazados de actividad lúdica, no se conviertan en magníficos negocios para sus promotores en detrimento del dinero del ciudadano común (Díaz Godino et al., 1988).

Un posible camino que permita incorporar en la práctica áulica el eje Probabilidad y Estadística es desarrollar métodos de investigación llevando adelante procesos de construcción, puesta en práctica y revisión de secuencias de actividades.

Formulación de preguntas y objetivos de conocimiento

La situación expuesta en el apartado anterior me ha llevado a plantearme la necesidad de investigar para dar respuesta al siguiente interrogante:

¿Cómo desarrollar en el primer año del Nivel Secundario el abordaje de la enseñanza de la Teoría de la Probabilidad de modo que los alumnos/as formulen intuiciones acertadas que favorezcan el desarrollo del pensamiento estocástico?

Ante la formulación de la pregunta que guiará el presente trabajo me parece fundamental explicar qué sentido se le dará en las páginas siguientes al *pensamiento estocástico.* La palabra estocástico deriva del griego *στοχαστικός* que en su traducción más literal hacer referencia a "lo hábil en conjeturar" (ASALE - RAE, 2014). La Real Academia Española (2014) ofrece dos acepciones para este término: "1. adj. Perteneciente o relativo al azar. 2. f. Mat. Teoría estadística de los procesos cuya evolución en el tiempo es aleatoria, tal como la secuencia de las tiradas de un dado." (ASALE - RAE, 2014). La definición remite a la aleatoriedad, que según el mismo diccionario, proviene del latín *aleatorius,* derivado de *alea,* "juego de azar" (ASALE - RAE, 2014), por lo que lo aleatorio es lo inherente a los juegos de azar. Se encuentra entonces, un nuevo término: azar, este vocablo tiene su raíz seminal en el árabe *zahr*, es decir: dado (ASALE - RAE, 2014). Por lo que, al concebir el pensamiento estocástico "nos remite al juego de dados, un ejemplo típico de lo que todo el mundo acepta como *fenómenos aleatorios*, donde una característica es el carácter imprevisible del resultado." (Batanero & Díaz Godino, 2002). Cabe destacar que el pensamiento estocástico no hace referencia exclusiva al juego de dados, sino que éste se alza como un representante de aquellos sucesos con resultados imprevisibles.

Desde esta concepción, el presente trabajo se propone dar respuesta a la pregunta formulada previamente con el objetivo de contribuir a que los contenidos del eje Probabilidad y Estadística sean tratados en la Educación Secundaria Básica con una metodología orientada hacia la formulación de intuiciones acertadas, para lo cual se formularán, pondrán en práctica y estudiarán secuencias de actividades. Estas propuestas y sus respectivos análisis pueden ser insumos para los docentes como modelos de posibles situaciones de trabajo con sus alumnos/as en el quehacer escolar.

Marco teórico orientador del futuro análisis y estado actual de los conocimientos

Para abordar los procesos de enseñanza y de aprendizaje del eje Probabilidad y Estadística es necesario recorrer el marco teórico que lo sustenta y el estado actual de los conocimientos en este campo de la matemática. Dada la basta cantidad de aportes de diversas ramas del saber a la Probabilidad, en el presente trabajo se realizará un análisis sobre aquellas contribuciones más sobresalientes y novedosas. Es por ello que en este apartado se ofrece un recorrido por los siguientes aspectos:

- Desarrollo histórico de la Teoría de Probabilidad.
- Marcos psicológicos y enseñanza de la probabilidad.
- Investigación en didáctica de la probabilidad.

Desarrollo histórico de la Teoría de Probabilidad

Para comprender la inclusión de la Teoría de la Probabilidad en nuestra currícula actual, se hace preciso un breve recorrido por las principales fases que atravesó esta rama de la matemática en su construcción.

Según Herrera (2004) los conceptos de azar e incertidumbre son tan antiguos como la civilización misma, dado que, en el año 3500 a.C. aproximadamente, los juegos de azar eran practicados con objetos de hueso, considerados como los precursores de los dados. Avanzando en la historia de la humanidad, la autora detalla que en las ideas de Aristóteles (384-322 a.C.) se encuentran tres tipos de nociones de probabilidad, que definen más bien actitudes frente al azar y la fortuna: “(1) el azar no existe y refleja nuestra ignorancia; (2) el azar proviene de causas múltiples y (3) el azar es divino y sobrenatural.” (Herrera, 2004, p. 735).

Sin embargo, transcurrieron varios años mucho antes de que alguien intentara cuantificar el azar y sus efectos. Los primeros problemas del tipo probabilístico pueden situarse con la consideración de los juegos de azar. Uno de ellos fue citado por Luca Pacioli (1494) en *Summa: si en un juego la victoria* *se obtiene cuando uno de dos jugadores alcanza primero n puntos, pero el juego se interrumpe cuando ellos han alcanzado respectivamente p y q puntos, ¿cómo se debe dividir la apuesta entre ellos?*

Este problema fue discutido después de 30 años por Cardano en el *Libro de los Juegos de Azar*[2], en donde indicaba que el cálculo de la probabilidad conjunta de dos eventos independientes se obtiene multiplicando sus probabilidades individuales.

A pesar de estas menciones a la probabilidad, diversos historiadores (Bell, 1992; Le Lionnais, 1962; Odifreddi, Rota, & Idiarte, 2006) señalan como hito que marca el nacimiento de la probabilidad la correspondencia establecida entre Blas Pascal y Pierre de Fermat en torno al problema anterior. La solución demandó del uso de propiedades de llamado triángulo de Pascal, particularmente de los coeficientes del desarrollo binomial. Así, la resolución al problema de Pacioli requiere del cálculo de las probabilidades que tiene un jugador de vencer todos los puntos que quedan, hasta el puntaje mínimo que, sumado a los puntos que ya tiene, le permite vencer el partido. La solución de Pascal fue publicada en 1656 por Christiaan Huygens (1629 – 1695) en su libro *De los razonamientos en los juegos de Azar*[3].

Asimismo, el escrito *Consideraciones sobre el dado* de Galileo (1612)[4] muestra que los matemáticos italianos del siglo XVI conocían el cálculo de una probabilidad a partir del concepto matemático de equiprobabilidad de las caras de un dado.

El desarrollo de la teoría de la probabilidad tomó un gran impulso con la publicación en el año 1656 de la obra del físico, geómetra y astrónomo holandés Huygens, resultado de haber tomado contacto en el año 1655 con las ideas de Pascal y Fermat por intermedio de Roberval, profesor de matemática del Collége Royal de Francia. En este tratado, no solo presenta la resolución del problema de Pacioli, sino que sistematiza las enseñanzas recibidas e introduce el concepto de *esperanza matemática* o *expectativa*. Que consiste en

---

[2] Título original: *Libel de Ludo Aleae.*
[3] Título original: *Tractatus de ratiociniis in ludo aleae.*
[4] Título original: *Considerazione circa il giuco dei dadi.*

saber cuánto se puede esperar ganar en promedio jugando un juego varias veces, y corresponde a cuánto se debería estar dispuesto a pagar para participar en el juego. El historiador Eric T. Bell (1992) señala a Huygens como el padre de la Teoría de la Probabilidad debido a la cristalización que logra de las ideas de los matemáticos franceses.

Cuatro aportes del siglo XVIII y comienzos del siglo XIX se destacan por su contribución de este campo. La primera es el *Arte de las Conjeturas*[5] (1713) de Jaime Bernoulli (1654 - 1705), donde el autor trató extensamente problemas combinatorios y de probabilidades; presentando resultados básicos. Así mismo, enunció el teorema que lleva su nombre que establece que aumentando suficientemente el número de observaciones, se puede conseguir cualquier grado de precisión prefijado. Dicho teorema fue luego generalizado por Tchebycheff (1881 – 1894) con la ley de los números grandes. Otro aporte puede atribuirse a DeMoivre con su *Doctrina de Posibilidades*[6] (1718), al pensar novedosos métodos de resolución de problemas concretos que adelantaban lo que posteriormente se conocería en estadística como distribución binomial y normal, además de trabajar sobre la idea de independencia estadística. Teniendo en cuenta sus aproximaciones a las sumas de los términos de un desarrollo en serie binómica se considera a DeMoivre como autor de la idea de la curva de distribución normal. DeMoivre limitó sus aplicaciones de la probabilidad a establecer la credibilidad de “Una Gran Primera Causa”. Continuando el recorrido histórico, consideraciones análogas llevaron al Reverendo Thomas Bayes (~ - 1761) a publicar su teorema de la probabilidad inversa, siendo el primero en emplear la probabilidad matemática inductivamente[7], sin embargo, la demostración que aportó de su fórmula no tuvo bases sólidas. Finalmente, el cuarto progreso sobresaliente fue la *Teoría Analítica de las Probabilidades*[8] (1812) de Pierre-Simón marqués de Laplace (1749 – 1827), obra maestra considerada como el

---

[5] Título original: “*Ars Conjectandi”.*
[6] Título original: “*Doctrine of chances”.*
[7] Su aporte consistió en expresar la probabilidad condicional de un evento cualquiera (A) dado otro evento (B) en términos de la probabilidad condicional del evento B dado A y la distribución de probabilidad marginal de sólo A.
[8] Título original: “*Théorie analytique des probabilités”.*

mayor aporte que haya hecho un hombre a la probabilidad. Dicho escrito, así como sus posteriores re ediciones, contenía más de cuarenta años de estudios hechos por el mismo Laplace sobre esta rama de la matemática. Cabe desatacar que si bien Laplace no fue el primero que consiguió una distribución continua de la probabilidad[9] sí merece el crédito de ser el primero en aplicar el análisis en manera amplia transformando la metodología de trabajo llevada a cabo hasta entonces. Laplace sostiene que una probabilidad es el cociente entre el número de casos favorables y el número de casos igualmente posibles, esta definición es la que actualmente reconocemos como definición clásica de probabilidad. Sin embargo, desde el punto de vista lógico es circular y por lo tanto inaceptable, dado que el número de casos igualmente posibles significa el número de casos igualmente probables, es decir que define la probabilidad sobre la base del conocimiento de una probabilidad.

Los progresos realizados por Laplace y sus colaboradores inmediatos: Legendre (1752 – 1833) y Gauss (1777 – 1855) fueron perfeccionados, sistematizados y ordenados a lo largo del siglo XIX, en dónde se introdujo el Cálculo de Probabilidades en la física, con el surgimiento de la mecánica estadística producto del trabajo efectuado por Boltzman (1844 – 1906). En este siglo sobresale el fundador de la Estadística Moderna: Adolfo Quetelet (1796 – 1874), astrónomo, naturista, matemático y sociólogo belga que basó sus investigaciones numéricas en el Cálculo de Probabilidades. Influyó, y también fue criticado, por la aplicación de los métodos estadísticos a las ciencias sociales. Fue el primer miembro no estadounidense de la American Statistical Association.

En 1837 el matemático francés Simeón – Denis Poisson (1781 – 1840) divulgó su obra *La investigación sobre los juicios de probabilidad en casos criminales y materia civil, precedido por las reglas generales de la Teoría de la Probabilidad*[10] donde demuestra una aproximación de la distribución binomial

---

[9] En 1756 el inglés Simpson (1710 – 1761) introdujo la continuidad en la teoría de la probabilidad matemática.

[10] Título original: *Recherches sur la probabilité de jugements en matiere criminelle et en matiere civille, precedées des regles générales du Calcul des Probabilités.*

por la de Poisson y generaliza la ley de los grandes números. Un año después, el inglés Augusto de Morgan (1806 – 1871) publicó *Un ensayo sobre probabilidades y sus aplicaciones a contingencias de la vida y las oficinas de seguros*[11], divido en seis partes que recorren los conocimientos probabilísticos y estadísticos hasta la época incorporando a los cálculos y tablas numéricas desarrollados explicaciones y aplicaciones a problemas concretos y "*comunes*"[12] (De Morgan, 1838).

Una nueva definición de probabilidad basada en la estabilidad de las frecuencias relativas fue acuñada por Antonio – Augusto Cournot (1801 – 1877) en su obra *Exposición de la teoría de posibilidades y probabilidades*[13] (1843).

En este siglo también se destacan los aportes de grandes matemáticos como: Boole (1815 – 1864), Venn (1834 – 1923) y Peirce (1809 – 1880) que abordaron el aspecto filosófico y lógico de la probabilidad, aportando demostraciones más sencillas de muchos de los teoremas conocidos. Merece una mención especial el matemático ruso Tchebycheff[14] (1821-8 - 1894), quien ideó el método de los momentos para demostrar el teorema fundamental del límite, e inició la escuela rusa que siguió sus estudios con sus discípulos: Markov (1856 – 1922) y Liapunov (1857 – 1918), entre otros.

En el final del siglo XIX se destacan dos personalidades: Poincaré (1854 – 1912), que estudió y aportó desarrollo en casi todas las ramas de la matemática y en probabilidad abordó la resolución de problemas de probabilidades geométricas en su libro *Cálculo de la Probabilidad*[15] *(1896);* y paralelamente, el austríaco Richard vos Mises (1883 – 1953) que sostuvo una postura empirista del cálculo de probabilidades, mediante la cual la probabilidad se calcula partiendo de las frecuencias relativas de la observación de resultados. Sin embargo, este enfoque fue objetado desde diversos puntos de vista, por ejemplo desde una visión de practicidad, dado que para establecer

---

[11] Título original: *An essay on probabilities and on their applications to life contingences and insurance offices*.
[12] El autor entiende por *problemas comunes* a aquellas situaciones que ocurren en la vida cotidiana de un ciudadano en las que interviene la Teoría de la Probabilidad.
[13] Título original: *Exposition de la theorie des chances et des probabilités.*
[14] Según la traducción puede encontrarse bajo el nombre Pafnuti Lvóvich Chebyshov.
[15] Título original: *Calcul des probabilités.*

una probabilidad se requiere de un número muy grande de resultados precisos, además de que en ciertos fenómenos aleatorios es imposible su repetición controlada.

En el siglo XX se forman diversas escuelas que tuvieron por objetivo redefinir los métodos matemáticos de la Probabilidad, logrando establecer una definición axiomática que facilita deducciones matemáticas dejando a un lado cuestiones filosóficas controversiales presentes en la definición empirista, lo cual buscaba brindar una relativa independencia a la Probabilidad. En este recorrido se enmarcan los estudios realizados por Karl Pearson (1857 – 1936) que en el año 1900 crea la revista *Biométrica* y contribuye con libros, artículos y memorias de tinte tanto teóricos como de las aplicaciones. Siguiendo con los aportes significativos dos profesores de la Universidad de Cambridge se destacan por sus publicaciones y tratamiento de problemas estadísticos: George Udny Yule (1871 – 1951) y Ronald A. Fisher (1890 - ~). Éste último matemático y biólogo inglés pudo demostrar la fórmula presentada por Thomas Bayes, logro por el cuál es reconocido con el título de padre de la estadística moderna y del diseño experimental.

Uno de los más duros críticos de la teoría clásica de la Probabilidad en el sentido laplaciano fue el economista inglés John M. Keynes (1883 – 1946), que en su *Tratado sobre la Probabilidad*[16] (1921) realiza una formulación de la teoría en sentido lógico, definiendo a la probabilidad como una relación estrictamente lógica entre la evidencia y la hipótesis:

> […] en el sentido importante a la lógica, la probabilidad no es subjetiva. Es decir, no está sujeta al capricho humano. Una proposición no es probable porque pensamos que así lo sea. Una vez que se dan los hechos que determinan nuestro conocimiento lo que es probable o improbable en estas circunstancias se ha fijado de manera objetiva, y es independiente de nuestra opinión. Por lo tanto, la Teoría de la

[16] Título original: A *Treatise on probability.*

> Probabilidad es lógica, ya que se trata con un grado de creencia que es racional para entretener dadas las condiciones, y no simplemente con las creencias actuales de individuos especiales, que pueden o no pueden ser racionales. (Keynes, 1921, p.3).

Otro aporte a la teoría moderna de la Probabilidad fue brindado por el matemático austríaco Richard vos Mises (1883 – 1953), debido a su interpretación de la probabilidad como frecuencias relativas a largo plazo. En el año 1933, profundizando en estas ideas, el matemático ruso Andrei N. Kolmogorov (1903 – 1987) incorporó el Cálculo de Probabilidades como rama de la matemática moderna al establecer una axiomática tomando como base la teoría de la medida desarrollada por Borel y Radon.

En la actualidad la Probabilidad está consolidada como una de las ramas más fecundas de la matemática, y grupos de matemáticos de todo el mundo continúan estudiando y realizando aportes novedosos[17].

Investigación psicológica y pensamiento estocástico

En el campo educativo los marcos psicológicos brindan herramientas para analizar la dinámica de los procesos de enseñanza y de aprendizaje, como así también para el desarrollo de líneas de intervención concretas, en relación a esto Freud aporta que: “*el pedagogo debe recibir instrucción psicoanalítica, pues de lo contrario el objeto de su empeño, el niño, seguirá siendo para él un enigma inabordable*” (Freud, 1925, p. 297). Del basto campo de los cuestionamientos e investigaciones psicológicas tomaré aquellas aproximaciones vinculadas al aprendizaje en los contextos educativos escolares.

[17] Son ejemplo de dicho grupos: el Buenos Aires Probability Group de la Universidad de Buenos Aires, el National Center for Education Statistics sito en Estados Unidos y las Conferencias Internacionales de Robust Statistics de la Universidad de Génova.

Cada vez que una persona hace una previsión sobre cualquier acontecimiento por más mínimo que parezca: *mañana lloverá*, *seguramente Carolina llegará tarde, las acciones en bolsa subirán el próximo semestre*, cada vez que toma una decisión: *mejor usá la campera*, *tomemos el desvío*, *conviene darle tal o cual droga al paciente*, etc., cada vez que busca o atribuye una causa: *se comporta así porque está mal*, *el ventilador no funciona porque es demasiado viejo*, o *la pelota se mueve porque la patearon*, está realizando evaluaciones que se insertan en un marco de juicios y toma de decisiones más o menos explícitos. Ante esto Echeverría y Bautista (2014) afirman que esa persona está haciendo uso de, lo que los psicólogos llaman, un razonamiento probabilístico. Según los autores: “Este razonamiento consiste en hacer un cálculo mental sobre las probabilidades de que vaya a ocurrir un o unos determinados acontecimientos, de que esos acontecimientos hayan ocurrido.” (Echeverría & Bautista, 2014, p.177). A través de ejemplos como los aportados anteriormente Echeverría y Bautista (2014) afirman que el razonamiento probabilístico subyace a la mayoría de las actividades mentales, proporcionando herramientas para que las personas sean capaces de enfrentarse con la incertidumbre, de modo tal que estas herramientas llevan a soluciones adecuadas y razonables.

Los estudios de Inhelder y Piaget (1951 en Kapadia, 2010) son pioneros en el análisis minucioso de las etapas en la adquisición de las nociones de aleatoriedad y probabilidad, el razonamiento combinatorio, distribución y convergencia, así como de la capacidad de cuantificación de probabilidades en niños y adolescentes. Estos estudios indican que en el estadio pre operacional, los niños de entre 4 a 7 años de edad, rechazan la idea de azar o la conciben de una forma determinista; tienen dificultad para diferenciar certeza e incertidumbre, carecen de estrategias combinatorias y al comparar probabilidades sólo toman en cuenta los casos favorables. Mientras que, entre los 7 y 11 años, en el periodo de las operaciones concretas, alcanzan paulatinamente una comprensión del azar, pero aún confían demasiado en la posibilidad de controlarlo. Así, sus estrategias de comparación de probabilidades se amplían, usando tanto los casos favorables como los desfavorables, sin llegar al razonamiento proporcional completo, lo que implica que no llegan a reconocer la ley de los grandes números. Finalmente en la etapa de operaciones formales, a partir de los 12 años de edad, los chicos progresivamente conciben el azar como ausencia de patrones e impredecibilidad, adquieren la intuición de la convergencia, llegan a usar proporciones en la comparación de probabilidades y alcanzan la capacidad de enumeración combinatoria.

Posteriormente, algunas de estas conclusiones son debatidas por Fischbein y Gazit (1984), cuyos trabajos constituyeron uno de los primeros puentes de unión entre la psicología y la educación matemática. Interesados no solo por la formación de los conceptos formales, sino por la aparición de intuiciones parciales sobre los conceptos estocásticos, preocupándose también por el efecto de la instrucción, señalando que:

> En el mundo contemporáneo, la educación científica no puede reducirse a una interpretación unívoca y determinista de los sucesos. Una cultura científica eficiente reclama una educación en el pensamiento estadístico y probabilístico. La intuición probabilística no se desarrolla espontáneamente, excepto dentro de unos límites muy estrechos. La comprensión, interpretación, evaluación y predicción de fenómenos probabilísticos no pueden ser confiados a intuiciones primarias que han sido despreciadas, olvidadas, y abandonadas en un estado rudimentario de desarrollo bajo la presión de esquemas operacionales que no pueden articularse con ellos. (Fischbein & Gazit, 1984).

En sintonía con lo antedicho, Fischbein y Gazit (1984) apoyaron decididamente la conveniencia de adelantar la educación probabilística y mostraron que sin instrucción es difícil que se desarrolle un razonamiento estocástico adecuado, incluso una vez que se alcanza la etapa de las operaciones formales, en este sentido expresan que:

> Se puede suponer, sobre la base de los datos anteriores [Los autores hacen referencia a su estudio*: ¿La enseñanza de la probabilidad Mejorar probabilísticos intuiciones?: Un estudio de investigación exploratoria*.], que un curso sobre probabilidad (incluyendo actividades prácticas) podría tener un efecto beneficioso positivo sobre los prejuicios y conceptos erróneos de los niños con respecto a las secuencias de eventos en situaciones de incertidumbre. (Fischbein & Gazit, 1984, p. 24).

Como se puede desprender de los párrafos anteriores, Kapadia (2010) explica que los puntos de vista de Piaget no se condicen con los de Fischbein y Gazit, dado que el primero sostiene que antes de la etapa de las operaciones formales, no lograda hasta la adolescencia, los niños/as no pueden comprender la probabilidad de modo que tampoco son capaces de realizar juicios probabilísticos, mientras que el segundo abona la idea de una instrucción temprana.

Diversos autores han estudiado la influencia de las creencias previas y concepciones animistas de los niños/as, su capacidad de percepción de lo aleatorio y comparación de probabilidades, lo que repercute en la toma de decisiones, pudiéndose hallar distintas posturas claramente definidas: la *idea de racionalidad acotada* sostenida por Kahneman, Slovic y Tversky (1973; 1977) y la *Idea de la adquisición de razonamientos correctos sobre conceptos abstractos* desarrollada por Nisbett y Ross (1980).

Kahneman, Slovic y Tversky (1973; 1977) abordan el razonamiento correlacional, la inferencia, la probabilidad condicional y regla de Bayes partiendo de la incertidumbre, describen los sesgos de razonamiento que ocurren como resultado de un proceso cognitivo, al que llaman *heurística*, que lleva a una conclusión incorrecta, tanto por usar un modelo inapropiado de la situación como por la falta de estructuras cognitivas específicas.

En relación a los *heurísticos,* Echeverría y Bautista (2014) explican que la psicología ha tomado prestada la palabra heurístico de la matemática:

> En las matemáticas los heurísticos son procedimientos de solución de problemas que se diferencian de los algoritmos por su vaguedad y falta de precisión. Esta idea de que los heurísticos son métodos vagos y poco definidos también está presente en la psicología tanto en lo referente a los métodos intuitivos de enfrentarse a la probabilidad como a los de solución de problemas. (Echeverría & Bautista, 2014, p. 185).

De acuerdo con estos autores, los heurísticos constituyen las reglas básicas de inferencia probabilística utilizadas por los adultos, independientemente de la cultura, del conocimiento sobre las leyes matemáticas de la probabilidad o sobre el contenido que se esté analizando. Así, afirman que los juicios heurísticos se rigen por principios generales que reducen tareas complejas a simples juicios, sin implicar un análisis exhaustivo de la información que se maneja. Por lo que, en tanto son procesos que simplifican nuestros juicios nos guían a tomar decisiones razonables con muy poco esfuerzo. Tversky y Kahneman (1973; 1977) reconocen dos tipos de pensamientos heurísticos: de representatividad y de accesibilidad.

Según los autores, la representatividad es la relación entre un proceso o un modelo y algún ejemplo o acontecimiento relacionado con ese modelo. Esta relación se valora por el grado de semejanza entre los acontecimientos que se están evaluando y es direccional, ya que nos permite valorar en qué medida una muestra es representativa de un modelo pero no a la inversa. Sin embargo, a veces esta relación puede ser reversible y se juzga la representatividad de un modelo en función de la muestra (Becker & Kuhn, 1984). Realizar juicios de probabilidad o de causalidad basándonos en este heurístico da lugar a respuestas conformes a la normativa bayesiana de la probabilidad en numerosas ocasiones ya que los hechos más representativos son habitualmente los más frecuentes y los más probables. Sin embargo, da lugar también a numerosos sesgos o errores sistemáticos en la medida que hay factores que afectan a la representatividad que no afectan a la probabilidad y viceversa. Según Kahneman y Tversky (1974 en Becker & Kuhn, 1984) estos errores sistemáticos no son debidos a la falta de comprensión de las normas estadísticas ya que esta comprensión no se ve afectada por los rasgos de representatividad y expertos en estadística e investigadores, que muestran su conocimiento de estas leyes en la mayor parte de sus trabajos, también cometen sesgos y errores en sus juicios cotidianos e incluso en algunas investigaciones (Tversky & Kahneman, 1973). Según estos autores, los errores más habituales producidos por el heurístico de representatividad son:

1. Concepciones erróneas sobre el azar.
   1.1. Falacia del jugador.
   1.2. Confusiones entre el proceso aleatorio y el producto aleatorio.
   1.3. Hacer equivalente aleatorio con «caótico» o desordenado.
2. Confusión en la utilización de la ley de los grandes números.
   2.1. Falacia del jugador.
   2.2. Creer que muestra y población se parecen en todos los aspectos.
   2.3. No tener en cuenta el tamaño de la muestra.
3. Problemas con las probabilidades compuestas.
   3.1. Falacia de la conjunción.
   3.2. Falacia de la disyunción.
   3.3. No tener en cuenta las probabilidades previas.
4. Problemas en la comprensión del concepto de regresión.

Juzgar la probabilidad por medio del heurístico de accesibilidad es equivalente a estimarla por medio de la facilidad con que los ejemplos o asociaciones vienen a nuestra mente. La accesibilidad consiste en creer que cuanto mejor recuerdes un suceso o más fácilmente accedas a ese recuerdo, más frecuente ha sido ese acontecimiento y por tanto es más probable (Tversky & Kahneman, 1974 en Becker & Kuhn, 1984). No obstante, hay variables que afectan al recuerdo o su accesibilidad y no afectan a la probabilidad y viceversa. Cuando esto ocurre nos encontramos que los juicios mediante accesibilidad dan lugar a los siguientes errores sistemáticos o sesgos:

1. Errores producidos por la prominencia de los datos.

2. Errores producidos por la singularidad de los datos o por coincidir con nuestras teorías previas.
3. Errores producidos por la primacía o ausencia de los datos.
4. Correlación ilusoria: creencia de que existe una relación entre dos acontecimientos cuando no la hay.

Los autores suponen que las heurísticas y sesgos son resistentes a la enseñanza y se dan incluso en sujetos con alta preparación matemática (Becker & Kuhn, 1984).

Sin embargo, Nisbett y Ross (1980) explican que los heurísticos también pueden llevar a conclusiones erróneas cuando se utilizan indiscriminadamente. Ante esto proponen la i*dea de la adquisición de razonamientos correctos sobre conceptos abstractos,* explicando que una representación adecuada de los problemas probabilísticos facilita el cálculo de probabilidades y produce soluciones acertadas a los problemas tratados, produciendo buenos resultados incluso en problemas que involucran el teorema de Bayes (Nisbett y Ross, 1980 en Becker & Kuhn, 1984).

Otra dificultad en la estimación probabilística se debe al *uso inadecuado o impreciso del lenguaje ordinario*. Muchos términos son utilizados frecuentemente en el lenguaje coloquial cotidiano con un significado similar, a modo de ejemplo se pueden citar los vocablos:

- Casual,
- Accidental,
- Eventual,
- Por suerte,
- Sin querer,
- Imposible,
- Impensado,
- Ocasionalmente,
- Siempre,
- A veces,
- Nunca,
- Podría ser, entre otros.

En relación al modo en que el uso inadecuado del lenguaje afecta el pensamiento estocástico, Kapadia (2010) invita a los educadores a prestar atención a la siguiente *diferencia significativa*:

> El pensamiento matemático es preciso y lógico. La probabilidad también se puede presentar de este modo, en términos de sus reglas básicas; sin embargo, la formulación de azar en sí tiene complicaciones. Para las matemáticas, las ideas básicas del número y la geometría están de acuerdo con la experiencia cotidiana. Sin embargo, como se señaló anteriormente, incluso en el enfoque frecuentista el significado de la incertidumbre puede ser contrario a la intuición. (Kapadia, 2010, traducción propia.).

Mayen, Batanero y Díaz (2009) distinguen el *significado institucional* y el *significado personal* de un mismo objeto matemático. Estableciendo que el primero incluye las prácticas matemáticas que se quieren transmitir a los alumnos/as en una institución educativa, mientras que el segundo está constituido por las prácticas matemáticas que adquiere el estudiante, algunas de las cuales podrían no coincidir con las pretendidas en la institución.

Shaughnessy (1977) afirma que la intuición del pensamiento probabilístico de los pueblos está distorsionada porque la educación científica sólo hace hincapié en el aspecto determinista y deja de lado el estudio de la incertidumbre. Así identifica otros dos tipos de errores y sesgos:

- No apreciar el carácter específico del azar debido a la dependencia de modelos deterministas y sistemas de creencias arraigados.
- No tomar en cuenta las informaciones provistas por experimentos aleatorios anteriores.

Cabe destacar que la presencia de dichas estrategias erróneas y sesgos en el pensamiento estocástico no se superan por una mera exposición teórica de los contenidos probabilísticos y estadísticos, por lo que su aparición no hace más que fortalecer la idea de la necesaria instrucción escolar temprana mediante una metodología experimental y heurística que evolucione hacia construcciones teóricas de esta rama de la Matemática. Shaughnessy (1977) brinda recomendaciones a tener en cuenta a la hora de proponer cursos sobre probabilidad para confrontar y superar los sesgos y errores arraigados:

- Introducir la enseñanza de la probabilidad y la estadística de forma experimental.
- Confrontar los sistemas de creencias personales, de carácter determinista, con la importancia y utilidad de la estadística para la toma de decisiones, con una base racional y objetiva.
- Sensibilizar a los alumnos/as hacia los usos incorrectos de la probabilidad y la estadística y enfrentarlos a paradojas.
- Brindar a los alumnos/as la oportunidad de resolver problemas que requieren de recoger datos y/o simular datos para la toma de decisiones.
- Que los docentes lleven a cabo investigaciones con sus propios alumnos/as para descubrir sus procesos de razonamiento y mejorar la propia práctica de enseñanza.

Hay evidencia experimental concreta de que los chicos/as son capaces de tener pensamientos estocásticos correctos mediante una adecuada instrucción, y es justamente esto lo que interesa desde el punto de vista de la Didáctica, dado que desde la visión de la Didáctica de la Matemática la importancia de estos trabajos radica en que permiten seleccionar de forma racional el tipo de tareas (situaciones problema) que podemos proponer a nuestros alumnos/as en función de la etapa evolutiva en la que se encuentren, otorgando valor a los conocimientos y modos de razonamientos de cada uno de los alumnos/as.

Investigación en didáctica de la probabilidad

La investigación en didáctica de la probabilidad comenzó de modo disperso desde diferentes grupos que poco a poco tratan de vincularse.

Actualmente, el Grupo de Investigación sobre Educación Estadística de la Universidad de Granada, coordinado por la Dra. María del Carmen Batanero Bernabeu, catedrática del Departamento de Didáctica de la Matemática de dicha casa de estudios, es quien marca la agenda en la investigación didáctica de la enseñanza del eje Probabilidad y Estadística.

La investigación sobre diseño y análisis de tareas en educación matemática que está siendo promovida por este grupo investigador se basa en el Enfoque Ontosemiótico de investigación en didáctica de la matemática (EOS), iniciado en la Universidad de Granada a principios de los años noventa. Este marco teórico surgió como resultado de la interacción de investigadores de dicha universidad con los desarrollos teóricos de la didáctica de la matemática iniciados en Francia por Brousseau, Douady, Vergnaud y Chevallard. La diversidad de teorías usadas para estudiar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas llevó a la convicción de la necesidad y utilidad de tratar de clarificarlas, y compararlas. Desde el EOS el significado de los objetos matemáticos, entre ellos los probabilísticos, se considera altamente complejo y está compuesto por distintos elementos de significado, los cuales serán tomados en cuenta:

- Situaciones–problema: que contemplan contextos tanto extra como intramatemáticos.
- Lenguajes: términos, expresiones, notaciones, gráficos en sus diversos registros (escrito, oral, gestual).
- Conceptos–definición: que se introducen mediante definiciones o descripciones.
- Proposiciones o propiedades: enunciados sobre conceptos.
- Procedimientos: algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo.
- Argumentos: enunciados usados para validar o explicar proposiciones y procedimientos (Mayen et al., 2009).

Se encuentran también aportes significativos de otros grupos de eruditos en el tema. En 1994, dentro de los congresos internacionales sobre Psicología de la Educación Matemática (PME), se creó un grupo de trabajo sobre estadística y probabilidad que estuvo en funcionamiento hasta el año 2000. En la actualidad, existen grupos de educación estadística en ICME (International Congress on Mathematics Education), CERME (European Research in Mathematics Education Conference), AERA (American Educational Research Association), RELME (Congresos Latino Americanos de Matemática Educativa), CIBEM (Congresos Iberoamericano de Educación Matemática) y Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, entre otros. Sin dejar de reconocer la contribución desde estos grupos, el principal impulsor de la investigación ha sido el ISI (Instituto Internacional de Estadística[18]). Además, en 1991 se fundó IASE (International Association for Statistical Education[19]) que desde su constitución remarcó la importancia de la investigación y la necesidad de difusión de sus resultados, creando, para ello la revista *Statistics Education Research Journal*. Paralelamente, se desarrollan otras revistas orientadas principalmente a profesores de los distintos niveles educativos, como *Teaching Statistics* y *Journal of Statistics Education*. La IASE realiza cada dos años conferencias reuniendo a diversos expertos, académicos, profesionales e investigadores de todo el mundo para discutir puntos de vista y enfoques en relación con los avances temáticos en educación estadística. La última de estas conferencias se realizó en Río de Janeiro, Brasil, del 22 hasta 24 julio de 2015 centrándose en cuatro subtemas: motivar a los profesores y alumnos/as; Big data: estadísticas oficiales y educación estadística; promover la educación estadístico utilizando la tecnología y los dispositivos móviles; y Educación Estadística en la era de las redes sociales y la educación a distancia.

[18] Para mayor información puede consultarse su sitio web oficial: http://isi.cbs.nl

[19] Puede recorrerse su página web oficial para mayor conocimiento: http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/

Acompañando la constitución de estos grupos de investigación otro hecho fue fundamental para el desarrollo de este campo: la puesta en marcha de las Conferencias Internacionales sobre Enseñanza de la Estadística (ICOTS). La primera de estas reuniones se organizó en 1992, continuando cada cuatro años. Recientemente, los días 26 a 31 de julio de 2015 se celebró en Brasil el 60° Congreso Mundial de la Estadística.

Se presentan a continuación diversos aportes de los grupos de estudio mencionados en los párrafos precedentes, que serán de insumo para el desarrollo y análisis de las actividades.

Matemática para no matemáticos

El matemático, científico, docente e investigador Dr. Luis A. Santaló propuso a los profesores:

> […] enseñar a tener curiosidad, a pensar por uno mismo y a perderle el miedo a los problemas, mucho más que a enseñar unos cuantos teoremas y unas cuantas reglas operativas que el alumno, si ha mantenido su mente ágil y una sólida preparación básica, podrá leer sin dificultad de cualquier libro o manual el día que lo necesite. (Santaló, 1966, p. 55).

En la conferencia inaugural del I Congreso de Educación Matemática (Sevilla, España, septiembre de 1990) titulada: *Matemática para no matemáticos*, Santaló pronunció la importancia de la introducción de las ideas básicas de la probabilidad, señalando que para ello se debe comenzar por modificar la instrucción de la matemática en la escuela, dado que se la ha pensado siempre como determinista, y propuso: “[…] cambiar este pensar determinista por el pensar probabilista o estadístico, basado en valores medios, grandes números, extrapolaciones e inferencias, pues los fenómenos y las situaciones aleatorias son los que más aparecen en la naturaleza y en la vida de relación.” (Santaló, 1990 en C. Parra, 1999, p. 28). En el mismo congreso el didacta advierte que la enseñanza de la matemática, en cualquier nivel, debe incitar a la creatividad, haciendo *verdadera* matemática, es decir logrando que los alumnos/as desarrollen en el aula las acciones de resolver y proponer problemas en forma alternada.

Tres años después el matemático formuló que toda didáctica consiste en motivar a los alumnos/as, aportando que el interés y el esfuerzo no deben ser una carga para estos. Retomando la didáctica propia de la matemática testifica que:

> Es curioso descubrir a alumnos sin ninguna capacidad matemática (a juzgar por las calificaciones de sus profesores) y que, sin embargo son excelentes jugadores de juegos de ingenio o de adivinanzas y entretenimientos en los que la agilidad mental y el razonamiento lógico juegan un importante papel. (Santaló, 1993, p.1).

Experiencia de instrucción: School Council Project on Statistical Education

Entre las experiencias realizadas para la introducción del eje Probabilidad y Estadística en la escuela se destaca el currículo desarrollado en los niveles de enseñanza obligatoria en Inglaterra (comprendido entre los 11 y 16 años) por el School Council Project on Statistical Education, creado en 1975 en la Universidad de Sheffield. Godino, Batanero y Cañizares sintetizan los principios metodológicos que orientan los materiales de enseñanza realizados por este grupo de trabajo del siguiente modo:

> 1. Los conceptos y técnicas serán desarrollados en un contexto práctico, vinculando las probabilidades al mundo del niño.
> 2. Las técnicas no tiene que ser completamente desarrolladas en la primera ocasión que se tratan. Muchas de las ideas introducidas en los primeros años se volverán a tratar en los posteriores.

3. La justificación teórica completa de todos los temas no es necesaria ni deseable. Algunos elementos sólo se tratan en el contexto de un problema, otros conceptos serán cubiertos únicamente por medio de experimentos y no se justifican teóricamente.
4. Se pondrá de manifiesto el carácter interdisciplinar de la Estadística y de la Probabilidad, relacionándolas con el mundo biológico, político, social y físico.
5. El método de trabajo individual del alumno sólo es recomendable para aprender algunas técnicas estadísticas específicas, pero no para los objetivos referentes a la interpretación de datos y obtención de inferencias. En este caso, el trabajo en grupos y la técnica de experimentación, ensayo y error, son recomendables. (Cañizares & Batanero, 1997; Díaz Godino et al., 1988).

Etapas del aprendizaje de Dienes

Olecka (1982 en Díaz Godino et al., 1988) ajusta el método de las Seis Etapas del aprendizaje en Matemática propuesto en el año 1977 por Zoltán Pál Dienes (1916 – 2014), y explica un proceso de enseñanza de las nociones de probabilidad, experimento compuesto, probabilidad condicional y esperanza matemática a través de las siguientes seis etapas que permiten el paso de lo concreto a lo abstracto:

- Etapa 1 de interacción inicial: se trata de realizar diversos experimentos aleatorios planteando juegos con reglas muy simples mediante el uso de monedas, dados, ruletas y otros elementos.
- Etapa 2 de descubrimiento de regularidades: se compran las estimaciones intuitivas a priori con la estabilidad de las frecuencias relativas observadas. Para ello se realizan experimentos y representaciones gráficas mediante tablas, diagramas de árbol, etc., seguidos de razonamientos simples basados en la simetría o proporción. Se considera un paso indispensable hacia la comprensión de la probabilidad la comparación de las probabilidades teóricas con las obtenidas por estimación de la frecuencia relativa.

- Etapa 3 de búsqueda de isomorfismos: consiste en probar que algunos experimentos pueden ser sustituidos por otros usando distintos dispositivos que son isomorfos en algún sentido: juegos de ceca-cara, juegos de par-impar, entre otros.
- Etapa 4 de representación: uso de los distintos sistemas de representación para los resultados posibles y sus probabilidades respectivas: tablas, gráficos, diagramas de sectores, diagramas de árbol, etc.
- Etapa 5 de propiedades de la representación: al analizar las diferentes representaciones es posible notar las propiedades elementales de la probabilidad, como la regla de Laplace y la probabilidad del suceso contario.
- Etapa 6 de formalización del sistema: esta etapa pude ser abordada sólo si se dio el recorrido de todos los pasos previos, y es exclusiva de los niveles de enseñanza superiores, llegando a una presentación formal del cálculo de probabilidades.

Etapas de la probabilidad escolar

Para realizar procesos de enseñanza y de aprendizaje de la probabilidad en el ámbito escolar Glayman y Varga (1975 en Díaz Godino et al., 1988) recomiendan llevar adelante un proceso de enseñanza en tres etapas:

- Experimentación: consiste en la familiarización del niño/a con el mundo probabilístico mediante una amplia experimentación, manipulando material variado (dados, monedas, bolas, fichas, etc.). Cada experiencia debe repetirse varias veces en las mismas condiciones y luego se propone a los niños/as que *adivinen* el resultado con objeto de que capten las propiedades inherentes a los fenómenos aleatorios.
- Razonamiento elemental: se trata de proponer juegos que favorezcan la comparación cualitativa de las probabilidades de ciertos sucesos.
- Medida de la probabilidad: en forma simultánea con el estudio de las situaciones se motiva el uso de fracciones, surgidas de las frecuencias, como medida de la probabilidad.

Materiales manipulativos y resolución de problemas

Con el objeto de propiciar una metodología estructurada mediante la cual se consiga una mayor ventaja del uso de materiales manipulativos y su integración con las ideas de fracción, proporción, porcentaje y resolución de problemas en la enseñanza de la probabilidad, Bruni y Silverman (1986 en Díaz Godino et al., 1988) sugieren un proceso de enseñanza basado en los siguientes cuatro pasos:

- Introducir del modelo mediante la discusión para construir el vocabulario específico a utilizar.
- Establecer un sistema de registro a través de la trascripción de las experiencias a tablas, diagramas y gráficas.
- Reflexionar sobre la experiencia identificando posibles modelos, resumiendo la información y planteando nuevas cuestiones.
- Generar nuevas experiencias favorecidas por la exploración de las actividades relacionadas, con el fin de reforzar y extender los conceptos introducidos.

Enfoques: Dicotomía Probabilidad de Laplace – Probabilidad Frecuencial

Shaughnessy (1993) aporta que histórica, teórica, didáctica y psicológicamente ha habido una tensión entre probabilidad basada en eventos equiprobables, es decir en el sentido definido por Laplace, y probabilidad consideradas como el límite de frecuencias relativas. Ante esto, el autor realiza la siguiente diferenciación:

- Probabilidad de Laplace: supone que es posible describir cada experimento de probabilidad en términos de bloques de construcción básicos que son igualmente probables. En las instituciones educativas se podría intentar modelar este enfoque equiprobable con diagramas de árbol.
- Probabilidad Frecuencial: se basa en la extracción de orden global de casos locales, por lo que tiene una base estadística. Los datos generados por dispositivos de dados al azar, hiladores, generadores de

números aleatorios, junto a la muestra visual de los datos, se pueden utilizar para modelar el enfoque de frecuencia relativa.

Metodología utilizada

El didacta toma elementos de varias disciplinas para poder desarrollar su trabajo, generando un entramado interdisciplinar (Villella, 2003), este entramado está constituido por las tradiciones prácticas, las ideologías y los aspectos prescriptivos de las distintas ramas del saber, determinando el nicho conceptual que constituye su campo de trabajo. Enfocando este análisis en la Didáctica de la Matemática el nicho conceptual se conforma de disciplinas tales como la matemática, la epistemología, la psicología, la lingüística, la sociología y la antropología (Fioriti, 2006). Según las interacciones y posicionamientos otorgados a las distintas componentes del hecho educativo se desarrollan dentro de la Didáctica específica de la Matemática diversos enfoques entre los que resaltan la Didáctica de la Matemática o Didáctica Fundamental, la Etnomatemática y la Educación Matemática.

Para la realización del presente trabajo me he situado dentro de la Didáctica de la Matemática o Didáctica Fundamental que toma a la actividad matemática como base del estudio de las relaciones entre la enseñanza y el aprendizaje a la vez que introduce en la relación docente, alumno/a y saber al aula como centro de realización de la actividad de enseñar y aprender matemática. Particularmente los análisis a realizar se encuadrarán dentro de la Teoría de Situaciones Didácticas (Brousseau, 2007; Brousseau, 1986), utilizando como metodología de investigación la Ingeniería Didáctica (Artigue, Douady, Gomez & Moreno, 1995; Artigue, 2004). Este modelo investigativo ligado a la Teoría de Situaciones invita a analizar los procesos de elaboración de conocimientos en clase en el marco de las situaciones propuestas para tratar de comprender y explicar los fenómenos que se producen en el aula. De este modo los resultados producidos son herramientas para entender y mejorar las prácticas de enseñanza.

Como metodología de investigación, la Ingeniería Didáctica se caracteriza por ser un esquema experimental basado en la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza. La estrategia para la concepción de las actividades se basó en la indagación bibliográfica presentada en los apartados anteriores, mientras que el estudio empírico se realizó en cursos de 1° año de la Educación Secundaría Básica de una escuela de gestión privada de la Provincia de Buenos Aires. Finalmente, el análisis de lo ocurrido se hizo tomando como base los aportes teóricos del campo de la Didáctica y las investigaciones psicológicas.

Resultados

Como resultado de los análisis y las variables confrontadas en los apartados anteriores: la construcción histórica de la Probabilidad, los estudios en el campo de la psicología, la visión de los didactas referentes en el eje, los lineamientos de los documentos curriculares argentinos y una revisión de experiencias llevadas a cabo en otros países, citadas en la bibliografía, se diseñaron y desarrollaron secuencias de actividades destinadas al primer año de la Educación Secundaría Básica.

Dicha ingeniería se llevó a cabo en dos cursos de 1° año de la Educación Secundaría Básica de una escuela de la Provincia de Buenos Aires, de 26 alumnos/as cada uno. A continuación se desplegarán los análisis a priori y a posteriori de las secuencias[20].

Análisis didáctico a priori

En la proyección de las secuencias didácticas he adoptado una concepción empirista de la probabilidad, dado que el tratamiento de frecuencias permite un acercamiento sencillo para los alumnos/as del Ciclo Básico del nivel

[20] En el Anexo Metodológico se presentan imágenes de lo sucedido en la implementación de las secuencias.

Secundario[21]. Las actividades presentadas son introductorias a los conceptos prescriptos por los documentos curriculares y tienen la intención de llevar a cabo procesos de enseñanza de la probabilidad basados en la experimentación, recuento, análisis de los resultados y comparación con las expectativas y preconceptos a priori sobre los mismos. Seguidamente se presenta el análisis didáctico a priori de las actividades desarrolladas en las tres primeras clases:

Clases N° 1 y N°2: Hacia una definición empirista de Probabilidad

En las primeras dos clases, de dos horas de duración cada una, se propuso a los alumnos/as la siguiente guía de trabajo:

En parejas resuelvan las siguientes actividades:

1. Si toman una moneda de un peso y la observan con atención podrán apreciar, si no está alterada, que de un lado tiene grabado el Sol y del otro el Escudo Nacional. Cuando arrojamos la moneda al aire y cae el Sol hacia arriba decimos que obtuvimos CARA, de lo contrario habrá resultado CECA. Lancen la moneda al aire diez veces y registren los resultados obtenidos.

2. ¿Cuántas caras obtuvieron? ¿y cecas?

3. ¿Creen que antes de lanzar nuevamente la moneda pueden decir con seguridad cuál será el próximo resultado? ¿Por qué?

¡Puesta en común! Llegó el momento de compartir entre todos lo que pudieron pensar en grupos. ***¿Todas las parejas utilizaron el mismo modo de registrar los resultados obtenidos? ¿Por qué? Luego de la***

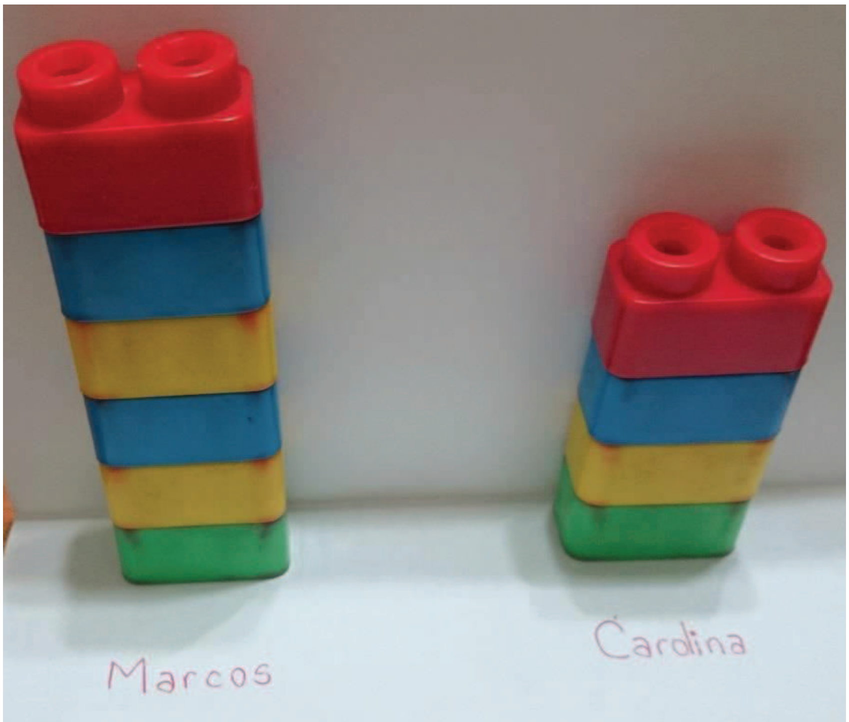
[21] En los años posteriores, se podrá introducir una postura con mayor rigidez axiomática.

puesta en común, ¿modificaron u ampliaron alguna respuesta? ¿Por qué?

4. Marcos y Carolina inventaron un juego que llamaron: *El juego de la Torre.* Para poder jugar usan bloques apilables con los que forman torres. Las reglas son las siguientes:

> *Se lanza una moneda al aire. Si sale cara, Carolina toma un bloque, y si sale ceca el bloque lo agarra Marcos. Con las piezas logradas van formando cada uno su torre. Después de diez jugadas gana el que obtiene la torre más alta.*

Luego de jugar una vez las torres quedaron conformadas del siguiente modo:



a. ¿Cuántas veces se obtuvieron ceca? ¿y cara?
b. ¿El escoger cara da mayor ventaja para ganar el juego? ¿Por qué?

5. Tomen los bloques apilables y la moneda y jueguen Uds. al juego inventado por Marcos y Carolina. Luego representen el resultado final.

¡Puesta en común! Llegó el momento de compartir entre todos lo que pudieron pensar en grupos. ***¿Todos los equipos utilizaron el mismo modo de registrar los resultados obtenidos? ¿Qué forma eligió cada grupo? ¿Consideran que alguna forma de representación es mejor que otra? ¿Por qué?***

6. Completen una tabla como la siguiente con los resultados obtenidos en los diferentes grupos:

Pareja de...	N° de caras	N° de cecas
………………….y………………….		
………………….y………………….		
………………….y………………….		
………………….y………………….		
………………….y………………….		
………………….y………………….		
………………….y………………….		
………………….y………………….		
………………….y………………….		
………………….y………………….		
………………….y………………….		
………………….y………………….		

a. ¿Cuántas veces ganaron los equipos de las caras? ¿y de las cecas?
b. ¿Cuál es el número total de caras? ¿y de cecas?
c. ¿Cuál es la diferencia entre el número total de caras y de cecas?
d. ¿El escoger cara da mayor ventaja para ganar el juego? ¿Por qué?

7. ¿Por qué les parece que para sortear cuál de los equipos puede elegir el arco o salir con la pelota, antes de comenzar un partido de fútbol, el árbitro les hace escoger a los capitanes un lado y otro de una moneda, y luego la arroja? ¿Tienen ambos capitanes la misma chance de ganar el sorteo?

8. ¿Sería equivalente hacerles sacar a cada uno de los capitanes una ficha de una bolsa opaca, donde hay una ficha blanca y otra negra, y que ganara el que saque la negra? ¿Por qué?

Como se ha desarrollado en el apartado histórico, la Probabilidad surgió ligada al juego y a la manipulación de elementos, esto no puede estar ausente en el proceso de enseñanza de las nociones de probabilidad, experimento compuesto, probabilidad condicional y esperanza matemática (Olecka, 1982 en Díaz Godino et al., 1988). Abordar estos conceptos implica recorrer un camino desde lo concreto a lo abstracto, por lo que no se recomienda ni es deseable la incorporación temprana de definiciones y conceptualizaciones matemáticas (Díaz Godino et al., 1988). Olecka ajustando las etapas de Dienes (1982 en Díaz Godino et al., 1988) describe que la interacción inicial debe realizarse mediante el desarrollo de diversos experimentos aleatorios planteando juegos con reglas muy simples mediante el uso de monedas, dados, ruletas y otros elementos. Se replicará esto en los procesos de enseñanza realizados en el aula.

La primera actividad tiene por objeto que los alumnos/as comiencen a desarrollar una noción de probabilidad empirista. Si bien en la situación de acción inicial, propuesta en las consignas uno y dos, no se explicitará al grupo de alumnos/as las palabras: *frecuencias relativas*, si se abordará su concepto mediante el recuento de la cantidad de caras y cecas obtenidas al lanzar una moneda de un peso horrada. En esa actividad no se indica a los alumnos/as el modo de representar la cantidad de caras y cecas obtenidas al realizar el experimento dado que se pretende que sean ellos quienes en función de la experimentación decidan el modo de registrar lo sucedido.

Los interrogantes de la actividad tres, pretenden que los alumnos/as pueden reflexionar acerca de la idea de aleatoriedad y su relación con el cálculo de probabilidades. Es importante dedicarle tiempo a este tipo de situaciones de formulación, dado que requieren de la comunicación de los alumnos/as y que estos compartan experiencias en la construcción del conocimiento.

Realizar la puesta en común de lo producido por las parejas de alumnos/as luego de resolver las primeras tres actividades tiene la intención de que los alumnos/as puedan comparar y discutir con sus pares diversas formas de resolución, decidiendo si es pertinente su modificación o la mejora de algún aspecto, así estos momentos son propicios para el surgimiento de nuevas estrategias. La verbalización de los procedimientos utilizados y las conclusiones halladas, no sólo benefician el trabajo matemático, sino que también son una guía para que el docente sepa hacia donde debe guiar los procesos de enseñanza.

Las actividades cuatro y cinco ponen a los alumnos/as en situaciones de acción donde deben reinvertir las ideas discutidas previamente, apilar los bloques luego de lanzar la moneda es un modo de introducir la construcción de gráficos de barras que muestran frecuencias relativas de un suceso. Seguidamente la propuesta de puesta en común busca que puedan verbalizar discursos no científicos acerca de las nociones estocásticas, y elaborar conclusiones basados en las pruebas de hipótesis. Por lo que, surge la necesidad de que cada integrante del grupo participe del proceso, es decir, que todos comuniquen sus ideas y las pongan en funcionamiento en la interacción con el medio didáctico. La sexta actividad se presenta como una continuación de la puesta en común, pero tiene por objeto que el grupo clase pueda realizar generalizaciones mediante un acercamiento a la ley de los grandes números.

Para cerrar la clase, se propone a las parejas pensar en una situación lúdica cotidiana: el inicio de los partidos de fútbol, cuando el árbitro arroja una moneda al aire para determinar qué sector de la cancha ocupará cada equipo. Se espera que los alumnos/as puedan interpretar probabilísticamente dicho suceso, brindando conceptualizaciones matemáticas al respecto de las decisiones tomadas, así, que los alumnos/as establezcan relaciones entre las variables presentes en los cuestionamientos propuestos se configura como una estrategia matemática básica del trabajo de modelización. Cabe destacar que si bien las actividades involucran muchos conocimientos en simultáneo, la complejidad no reside en los conocimientos en sí mismos sino justamente en su uso concurrente.

Es oportuno notar que no se mencionan frente al grupo de alumnos/as los conceptos de: frecuencias relativas, ley de los grandes números y probabilidad, aunque si se trabaja con ellos. Las situaciones de institucionalización[22] no deben darse necesariamente luego de cada actividad. En una clase tradicional de matemática, el profesor propone una actividad, los alumnos/as la realizan, y esperan que sea el docente quien apruebe o no lo realizado, dentro del medio analizado anteriormente los motivos didácticos de la no intervención constante del docente como validador del aprendizaje se fundamenta en que luego del estudio de nuevas problemáticas donde los alumnos/as tengan que reutilizar lo abordado, el profesor institucionalizará los saberes.

Clase N°3: A mí no me va a pasar o… ¡todo lo contrario!

En la tercera clase, de dos horas de duración, se propuso a los alumnos/as la siguiente guía de trabajo:

---

[22] Se entiende por situación de institucionalización a aquellos momentos donde el profesor legitima el saber que debe ser aprendido otorgándole a determinados conocimientos el estado cultural indispensable de saberes.

1. Observen con atención el siguiente fragmento de la película *Tonto y Retonto*[23].
2. En grupos de cuatro integrantes repasen el diálogo mantenido entre Lloyd (Jim Carrey) y Mary y luego resuelvan las actividades propuestas:

"Lloyd: ¿Cuáles son las posibilidades de que un chico igual a ti y una chica como yo [*sic*] lleguen a tener una relación? [...]
Mary: No son buenas.
Lloyd: ¿No son buenas del uno al cien, cómo cuantas?
Mary: Yo diría como de una en un millón.
[Pausa]
Lloyd: ¡Estás diciéndome que hay una!... ¡Sí!"

La conversación es graciosa, pero además nos invita a pensar en qué significa tener una "*posibilidad*". Para ustedes, ¿qué quiere decir que *exista una posibilidad*?

En un artículo periodístico de la revista *Nature,* de 1994, Clark Chapman y David Morrison analizaron diferentes posibilidades de morir a causa de accidentes en Estados Unidos. Esta es la lista que elaboraron:

Accidente automovilístico: 1 en 100
Asesinato: 1 en 300
Incendio: 1 en 800
Accidente con armas de fuego: 1 en 2.500
Electrocutado: 1 en 5.000
Accidente aéreo: 1 en 25.000
Comida en mal estado: 1 en 30.000
Tornado 1 en 60.000

[23] El fragmento de la película se encuentra disponible como video mediante el siguiente enlace web: https://www.youtube.com/watch?v=mK2m9k6fxSE&feature=youtu.be

Mordedura o picadura venenosa: 1 en 100.000

Accidente con fuegos artificiales: 1 en 1.000.000

Comida envenenada: 1 en 3.000.000

Tomar agua contaminada: 1 en 10.000.000

Luego de analizar la tabla resuelvan:

a. ¿Qué significan las *posibilidades* que muestra la lista?
b. ¿En qué fila de la tabla se coloca la posibilidad de que Mary se enamore de Lloyd?
c. ¿Con qué suceso de la lista publicada en la revista *Nature* se compara la posibilidad de que Mary se enamore de Lloyd?
d. ¿Es correcto afirmar que Lloyd tiene mayores posibilidades de morir por un tornado a que Mary se enamore de él? ¿Por qué?
e. ¿Es cierto decir que Lloyd morirá a causa de un tornado antes que Mary se enamore de él? ¿Por qué?
f. Comparen las preguntas y respuestas dadas en los ítems d y e. ¿En qué se diferencian? ¿Por qué?
g. ¿Es imposible que Mary se enamore de Lloyd? ¿Por qué?

¡Puesta en común! Llegó el momento de compartir entre todos lo que pudieron pensar en grupos. ***Luego de la puesta en común, ¿modificaron u ampliaron alguna respuesta? ¿Por qué?***

3. Lean con atención y contesten:

Para aquellos sucesos cuyo resultado es imprevisible los matemáticos han desarrollado una disciplina llamada ***Probabilidad***. Uno de los objetivos de la Probabilidad es evaluar la posibilidad de que un suceso ocurra o no.

¿Qué significado tienen para Ustedes las siguientes palabras: seguro, imposible, probable, muy probable, poco probable, improbable?

En la etapa inicial del proceso de enseñanza de la probabilidad se deben proponer a los alumnos/as situaciones problemas que introduzcan el modelo probabilístico mediante la discusión para construir el vocabulario específico a utilizar (Bruni & Silverman, 1986). Como actividad potencializadora de dicho debate se propone al comienzo de la clase ver un fragmento, de 1 minuto de duración, de la película *Tonto y Retonto* (Farrelly, P., & Farrelly, B., 1994). Tanto en la grabación, como en la transcripción presentada al grupo de alumno/as se evidencia el uso de la palabra *posibilidad*. Propiciar debates en relación a vocabulario cotidiano en donde subyacen conceptos probabilísticos tiene como objetivo que los alumnos/as reflexionen sobre el *uso inadecuado o impreciso del lenguaje ordinario*, dado que muchos términos son utilizados frecuentemente en el lenguaje coloquial cotidiano con un significado similar.

Presentar la lista de diferentes posibilidades de morir a causa de accidentes en Estados Unidos (Chapman & Morrison, 1994) pretende que los alumnos/as confronten los sistemas de creencias personales, de carácter determinista, con la importancia y utilidad de la estadística para la toma de decisiones, con una base racional y objetiva (Shaughnessy, 1977). Sin embargo, la dependencia hacia modelos deterministas y sistemas de creencias arraigados no se sortea por la simple exposición de un listado académico de probabilidades, para guiar a los jóvenes a apreciar el carácter específico del azar (Shaughnessy, 1977) se presentan interrogantes que pretenden diferenciar las nociones de *posibilidad* y *certeza,* así como de asignar grados de posibilidad, de modo tal de establecer un vocabulario común y específico: *seguro, imposible, probable, muy probable, poco probable, improbable*, identificar posibles modelos y resumir la información, lo que permitirá en las clases subsiguientes plantear y abordar desde las conceptualizaciones acordadas nuevas cuestiones (Bruni & Silverman, 1986).

Análisis didáctico a posteriori

Sección no disponible.

Los análisis a posteriori se encuentran a la espera de ser publicados en una revista académica.

Conclusiones y Prospectivas

Al comenzar el presente trabajo me propuse hallar un posible *camino* que permita *desarrollar en el primer año del Ciclo Básico del Nivel Secundario el abordaje de la enseñanza de la Teoría de la Probabilidad de modo que los alumnos/as formulen intuiciones acertadas que favorezcan el desarrollo del pensamiento estocástico.* Pensar en un *camino* implica partir de un lugar para llegar a otro, y en esa implicación subyace el hecho de que para llegar a algún sitio hay que ponerse en marcha, y cada nuevo paso será el resultado de los pasos y recorridos anteriores.

Partiendo de la idea de que la intuición probabilística no se desarrolla espontáneamente, excepto dentro de límites ceñidos (Fischbein & Gazit, 1984) se ha tomado como punto inicial una concepción empirista de la probabilidad (Shaughnessy, 1977) con el objetivo de llegar, al final de la escolarización secundaria, a las puertas de la probabilidad axiomática, que evolucionará hacia construcciones con mayor grado de complejización teórica. Las secuencias presentadas introducen un pensamiento del tipo estocástico apoyado en el desarrollo de pensamientos heurísticos (Tversky & Kahneman, 1973; Tversky, 1977).

La idea que guía el recorrido es que es posible desarrollar mediante la instrucción escolar temprana (Fischbein & Gazit, 1984; Santaló, 1999) la *adquisición de razonamientos correctos sobre conceptos abstractos* (Nisbett & Ross, 1980) a través de una representación adecuada de los problemas probabilísticos con una metodología experimental y heurística apoyada en el uso de materiales manipulativos (Bruni & Silverman, 1986) y ligado a juegos, tal como se inició el estudio de la probabilidad en el año 1494 por Luca Pacioli.

En consonancia con lo planteado por Nisbett y Ross (1980) y Santaló (1993) las experiencias áulicas desarrolladas muestran que los alumnos/as logran una representación adecuada de los problemas probabilísticos cuando se planifican ingenierías didácticas con problemas que revisten de interés para ellos. Lo cual les facilita su comprensión y cálculo de probabilidades, produciendo soluciones acertadas a los problemas tratados, adquiriendo así razonamientos correctos sobre *fenómenos aleatorios*, donde la característica fundamental es el carácter imprevisible del resultado, lo que promueve el tratamiento de conceptos abstractos. Poder cumplir con los objetivos propuestos en el presente trabajo implicó necesariamente que como docente idee, ponga en práctica y analice secuencias de actividades basadas en el desarrollo histórico de la probabilidad, tomando las investigaciones psicológicas y didácticas en este campo.

La construcción histórica de los conceptos probabilísticos requirieron de debates, intercambios de correspondencia, publicaciones académicas y conformación de grupos de estudio, replicar esto en el aula favorece el desarrollo de correctos pensamientos estocásticos. El trabajo en grupos y la técnica de experimentación, ensayo y error, son recomendables por sobre metodologías de trabajo individual (Godino, Batanero & Cañizares, 1996). Por lo que, otro aspecto a concluir es que resultó necesario prever momentos de intercambios y diálogos en clase, de modo que se propicie en el aula la resolución en comunidad de problemas mediante un tratamiento frecuencial que involucren el uso activo de materiales manipulativos, donde las ideas previas, sesgos y errores se expliciten y debatan, avanzando hacia conceptualizaciones probabilísticas que gradualmente se complejicen, poniendo de manifiesto regularidades que permitan concluir definiciones y generalizar propiedades. Cabe destacar que para que esto sea posible, resulta conveniente pautar y flexibilizar los momentos destinados a los intercambios y diálogos lo que, en comparación con clases tradicionales y conductistas insume necesariamente una mayor cantidad de tiempo. El trabajo de una comunidad que aprende implica necesariamente el debate ordenado de las ideas y el registro de sus experiencias y observaciones, para lo cual nuestros alumnos/as cuentan con su carpeta de actividades. Como profesora me resultó enriquecedor desarrollar también mi propio registro de lo sucedido en las clases, dado que me permitió llevar a cabo *investigaciones* con mis propios alumnos/as para descubrir sus procesos de razonamiento y mejorar la propia práctica de enseñanza (Shaughnessy, 1977, 1993).

Las Ingenierías Didácticas desplegadas sugieren que la metodología y el modelo de enseñanza utilizados en los dos cursos de 1° año de la Educación Secundaria permitirían establecer los primeros pasos hacia la construcción de pensamientos estocásticos certeros. Por lo tanto, proponer actividades en que los alumnos/as lleven a cabo experimentos, construyan sus propios modelos de probabilidad y descubran los principios de conteo por sí mismos, puede ayudar a los alumnos/as a superar sus conceptos erróneos acerca de la probabilidad, y restaura la síntesis entre lo necesario y lo posible, que es esencial al pensamiento probabilístico.

En pos de la construcción de un camino que atraviese toda la escolaridad secundaria de los alumnos/as se propone:

- Continuar con el desarrollo de secuencias de actividades que adopten una concepción empirista de la probabilidad no sólo mediante el uso de material manipulativo sino incluyendo software y otros recursos tecnológicos;
- Desarrollar ingenierías didácticas para los años sucesivos de la Educación Secundaria basadas en la concepción analizada en el presente trabajo;
- Investigar los modos de evaluar la adquisición de correctos pensamientos estocásticos;
- Estudiar las implicaciones de estos modos de abordaje de la probabilidad en los aprendizajes de los alumnos/as, y las formas en que benefician o perjudican la adquisición de conceptualizaciones axiomáticas en los niveles de Educación Superior.

Finalmente, me gustaría señalar que de ningún modo este trabajo trata de desplegar una única manera de desarrollar la enseñanza de la probabilidad en el primer año del Nivel Secundario, sino que pretende invitar a pensar a quién lo lea en posibles modos de guiar a los alumnos/as para que desarrollen pensamientos estocásticos certeros. Dado que, como docentes nos moviliza, entre otros factores, la responsabilidad asumida de lograr buenos aprendizajes matemáticos para todos nuestros alumnos/as, de modo que, dentro de muchos años, cuando estos ya no sean alumnos/as del Nivel Secundario, puedan comprender situaciones y afrontar problemas.

Referencias Bibliográficas

Artigue, M., Douady, R., Gomez, P., & Moreno, L. (1995). Ingenieria didactica en educacion matematica: un esquema para la investigacion en la ensenanza y el aprendizaje de las matematicas. Bogota: Grupo Editorial Iberoamerica.

ASALE, R.-. (2014). Diccionario de la lengua española - Edición del Tricentenario. Recuperado 23 de mayo de 2016, a partir de http://dle.rae.es/?id=TIZy4Xb

Batanero, C., & Díaz Godino, J. (2002). Estocástica y su didáctica para maestros. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Becker, J., & Kuhn, D. (1984). Judgements under uncertainty: Heuristics and biases. New Ideas in Psychology, 2(2), 201-210. http://doi.org/10.1016/0732-118X(84)90024-2

Bell, E. T. (1992). Historia de las matemáticas. Mexico: Fondo de Cultura Económica.

Brousseau, G. (2007). Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactiques des mathématiques. Recherches en Didactique de Mathématiques, Vol. 7 Nº 2, 33-115.

Cañizares, M. J., & Batanero, C. (1997). Influencia del razonamiento proporcional y de las creencias subjetivas en la comparación de probabilidades. Uno. Recuperado a partir de http://www.ugr.es/~batanero/ARTICULOS/comparacion.htm

Chapman, C. R., & Morrison, D. (1994). Impacts on the Earth by asteroids and comets: Assessing the hazard. Nature, 367(6458), 33.

Chevallard, Y. (1998). La Transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado. Buenos Aires: Aique.

De Morgan, A. (1838). On the Notion of Probability its Measurement. En An essay on probabilities, and their application to life contingencies and insurance offices (pp. 1-29). Londres: Longman, Orme, Brown, Green & Longmans. Recuperado a partir de http://archive.org/details/anessayonprobab00morggoog

Díaz Godino, J., Batanero Bernabeu, M. del C., & Cañizares Castellanos, M. J. (1988). Azar y probabilidad: fundamentos didácticos y propuestas curriculares. Madrid: Editorial Síntesis.

Echeverría, M. P., & Bautista, A. (2014). Pensamientoprobabilístico. En Psicología del pensamiento: teoría y prácticas (2a ed., pp. 177-198). Madrid, España: Larousse - Alianza Editorial. Recuperado a partir de http://site.ebrary.com/lib/alltitles/docDetail.action?docID=11028598

Fioriti, G. (2006). Didácticas Específicas. Reflexiones y aportes para la enseñanza. Buenos Aires: Miño y Dávila Editores. Recuperado a partir de http://public.eblib.com/choice/publicfullrecord.aspx?p=3211611

Fischbein, E., & Gazit, A. (1984). Does the Teaching of Probability Improve Probabilistic Intuitions?: An Exploratory Research Study. Educational Studies in Mathematics, (1), 1.

Freud, S. (1925). Prólogo a August Aichhorn. En Obras Completas. El yo y el ello y otras obras. (Vol. 19). Amorrortu editores. Recuperado a partir de http://www.bibliopsi.org/docs/freud/19%20-%20Tomo%20XIX.pdf

Gobierno de la Provincia de Buenos Aires, & Dirección General de Cultura y Educación. (2006a). Diseño Curricular para la Educación Secundaria 2º año (SB). La Plata. Recuperado a partir de http://67.192.84.248:8080/handle/10469/6158

Gobierno de la Provincia de Buenos Aires, & Dirección General de Cultura y Educación. (2006b). Diseño Curricular para la Educuación Secundaria 1º año (7º ESB) (2ª edición). La Plata. Recuperado a partir de http://bitacora.vv.si/admin/bibliografia/1%C2%BA%20ESB%20-%20Cs.%20Sociales.pdf

Gobierno de la Provincia de Buenos Aires, & Dirección General de Cultura y Educación. (2008). Diseño Curricular para la Educación Secundaria 3º (SB). La Plata. Recuperado a partir de http://www.archivos.colegiosanmarcelo.com.ar/Documentos%20Institucionales/Resoluciones/SECUNDARIA%20B%C1SICA%203er%20A%D1O.pdf

Gobierno de la Provincia de Buenos Aires, & Dirección General de Cultura y Educación. (2010). Diseño Curricular para la Educación Secundaria Ciclo Superior 4º año. La Plata. Recuperado a partir de http://67.192.84.248:8080/handle/10469/6158

Gobierno de la Provincia de Buenos Aires, & Dirección General de Cultura y Educación. (2011a). Diseño Curricular para la Educación Secundaria

Ciclo Superior 5° año. La Plata. Recuperado a partir de http://67.192.84.248:8080/handle/10469/6158

Gobierno de la Provincia de Buenos Aires, & Dirección General de Cultura y Educación. (2011b). Diseño Curricular para la Educación Secundaria Ciclo Superior 6° año. La Plata. Recuperado a partir de http://67.192.84.248:8080/handle/10469/6158

Herrera, E. (2004). Desarrollo del pensamiento estocástico. En Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (Vol. 17, pp. 735-739). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C. Recuperado a partir de http://funes.uniandes.edu.co/6413/

Herrera Daza, E. (s. f.). Desarrollo del pensamiento estocástico. En Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (Vol. 17, pp. 735-739). CLAME.

Honorable Congreso de la Nación Argentina. Ley de Educación Nacional, 131062 (2006). Recuperado a partir de http://www.infoleg.gob.ar/?page_id=112

Kapadia, R. (2010). Chance and necessity: the languages of probability and mathematics. En Data and context in statistics education: Towards an evidence-based society. Eslovenia: International Statistical Institute.

Keynes, J. M. (1921). A treatise on probability. London: Macmillan and Co., Limited.

Le Lionnais, F. (1962). Las grandes corrientes del pensamiento matemático. Buenos Aires: EUDBA.

Mayen, S., Batanero, C., & Díaz, C. (2009). Semiotic conflicts of mexican students for a problem of comparison of ordinal data. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 12(2), 151-178.

Ministerio de Educación, & Consejo Federal de Educación. (2011, octubre). Núcleos de Aprendizajes Prioritarios - Ciclo Básico - Educación Secundaria-Matemática. Recuperado a partir de http://www.educ.ar/sitios/educar/recursos/ver?id=110570&referente=docentes

Montesinos, M. P., Pascual, L., & Sinisi, L. (2009). Sentidos en torno a la'obligatoriedad'de la educación secundaria. Recuperado a partir de http://repositorio.educacion.gov.ar/dspace/handle/123456789/96900

Nisbett, R. E., & Ross, L. (1980). Human inference: strategies and shortcomings of social judgment.

Odifreddi, P., Rota, G. C., & Idiarte, C. (2006). La matemática del siglo XX: de los conjuntos a la complejidad. Madrid: Katz Editores.

Santaló, L. A. (1966). La matemática en la escuela secundaria. Buenos Aires: Eudeba.

Santaló, L. A. (1993). Matemática 3. Iniciación a la creatividad. Buenos Aires: Editorial Kapelusz.

Santaló, L. A. (Ed.). (1999). Matemática para no matemáticos. En C. Parra. Didáctica de matemáticas: aportes y reflexiones (7a reimpresión). Buenos Aires; Barcelona: A México : Paidós.

Shaughnessy, J. M. (1977). Misconceptions of probability: an experiment with a small-group, activity-based, model building approach to introductory probability at the college level. Educational Studies in Mathematics, 8, 295-316. http://doi.org/10.1007/BF00385927

Shaughnessy, J. M. (1993). Cognitive Snapshots of the Stochastic River. Journal for Research in Mathematics Education, 24(1), 70-77. http://doi.org/10.2307/749387

Tversky, A. (1977). Features of similarity. Psychological Review, 84, 327-352. http://doi.org/10.1037/0033-295X.84.4.327

Tversky, A., & Kahneman, D. (1973). Availability: A heuristic for judging frequency and probability. Cognitive Psychology, 5(2), 207-232. http://doi.org/10.1016/0010-0285(73)90033-9

Bibliografía

Alagia, H. R., Bressan, A. M. & Sadovsky, P. (2005). *Reflexiones teóricas para la educación matemática*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Batanero, C. (2013). La comprensión de la probabilidad en los niños: ¿qué podemos aprender de la investigación? *Atas Do III Encontro de Probabilidades E Estatística Na Escola*, 9–21.

Batanero, C., Contreras, J. M., & Díaz, C. (2014). Sesgos en el Razonamiento Sobre Probabilidad Condicional e Implicaciones Para la Enseñanza. *Revista Digital: Matemática, Educación e Internet*, *12*(2). Recuperado de http://revistas.tec.ac.cr/index.php/matematica/article/view/1673

Batanero, C., & Díaz, C. (2007). Probabilidad, grado de creencia y proceso de aprendizaje. Presented at the XIII Jornadas Nacionales de Enseñanza y

Aprendizaje de las Matemáticas., Granada.: Federación Española de Profesores de Enseñanza de las Matemáticas. Recuperado de http://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/PonenciaJAEM.pdf

Batanero, C., Ortíz, J. J., & Serrano, L. (n.d.). Investigación en Didáctica de la Probabilidad. *Uno: Revista de Didáctica de Las Matematicas*. Recuperado de http://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/uNOiNVESTIGACION.pdf

Bressan, A. P. de, & Bressan, O. (2008). *Probabilidad y estadística: cómo trabajar con niños y jóvenes : construyendo paso a paso herramientas y conceptos*. Buenos Aires: Ediciones Novedades Educativas.

Camelo Bustos, F. J., & Mancera Ortiz, G. (2005). El sentido una característica importante en las situaciones didácticas y los campos conceptuales: una propuesta metodológica para el aprendizaje de las matemáticas. *Tecné, Episteme y Didaxis*, (18), 5–16.

Campos, A. (2004). Laplace: Ensayo filosófico sobre las probabilidades. *Revista Colombiana de Estadística*, *27*(N°2), 153 a 177.

Cañizares, M. J., & Batanero, C. (1997). *Influencia del razonamiento proporcional y de las creencias subjetivas en la comparación de probabilidades*. Uno. Recuperado de http://www.ugr.es/~batanero/ARTICULOS/comparacion.htm

Contreras, J. M., Díaz, C., Batanero, C., & Cañadas, G. (2013). Definiciones de la probabilidad y probabilidad condicional por futuros profesores. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/6223/

Devore, J. L. (2005). *Probabilidad y Estadística para ingeniería y ciencias.* (6° edición). México. Editorial Thomson.

Ferreras-Soto, P. (1996). *La enseñanza de las matemáticas: puntos de referencia entre los saberes, los programas y la práctica*. Pont-à-Mousson (24 rue du 26e BCP, 54700): Topiques éd.

Fischbein, E. & Gazit, A. (1984). Does the Teaching of Probability Improve Probabilistic Intuitions? : An Exploratory Research Study. *Educational Studies in Mathematics*, *15*(1), 1-24.

García, J. M. C., Bernabeu, C. B., Batanero, C. D., & Arteaga, P. (2013). Evaluación de la Falacia del Eje Temporal en Futuros Profesores de Educación Secundaria/Assessing the Time Axis Fallacy in Prospective Secondary School Teachers. *Acta Scientiae*, *14*(3), 346–362.

Gysin, Liliana M., & Fernández, Graciela I. (2001). *Matemática. Una mirada numérica.* (2° edición: marzo de 2001). Buenos Aires - Argentina: A-Z editora.

Martí, L. (Ed.). (2007). Probabilidades. *Uno: Revista de Matemáticas*, *44*, 88.

Paenza, A. (2008). *Matemática... estás ahí?: episodio 100*. Buenos Aires: Siglo XXI Ed. Argentina.

Paenza, A. (2013). *Matematica...estás ahi?: la vuelta al mundo en 34 problemas y 8 historias*. Buenos Aires: Siglo XXI.

Rojo, A. (2012). *El azar en la vida cotidiana*. Buenos Aires: Siglo Veintiuno.

Romero, L. S., Bernabeu, M. del C. B., & de Haro, J. J. O. (1996). Interpretación de enunciados de probabilidad en términos frecuenciales por alumnos de bachillerato. *Suma*, *22*, 43–50.

Romero, L. S., & Bernabeu, M. del C. B. (1995). La aleatoriedad, sus significados e implicaciones educativas. *Uno: Revista de Didáctica de Las Matematicas*, (5), 15–28.

Santaló, L. A. (1977). *La educación matemática hoy.* Barcelona. Teide.

Serrano, L., Batanero, C., & Cañizares, M. J. (1999). Concepciones sobre distribuciones aleatorias planas en alumnos de secundaria. *Epsilon*, *43*(44), 149–162.

Serrano, L., Batanero, C., Ortíz, J. J., & Cañizares, M. J. (1998). Heurísticas y sesgos en el razonamiento probabilístico de los alumnos/as de secundaria. *Educación Matemática*, *10*(1), 7–25.

Serrano, L., Batanero, C., Ortiz, J. J., & Cañizares, M. J. (2001). Concepciones de los alumnos de secundaria sobre modelos probabilísticos en las secuencias de resultados aleatorios. *Suma*, *36*, 23–32.

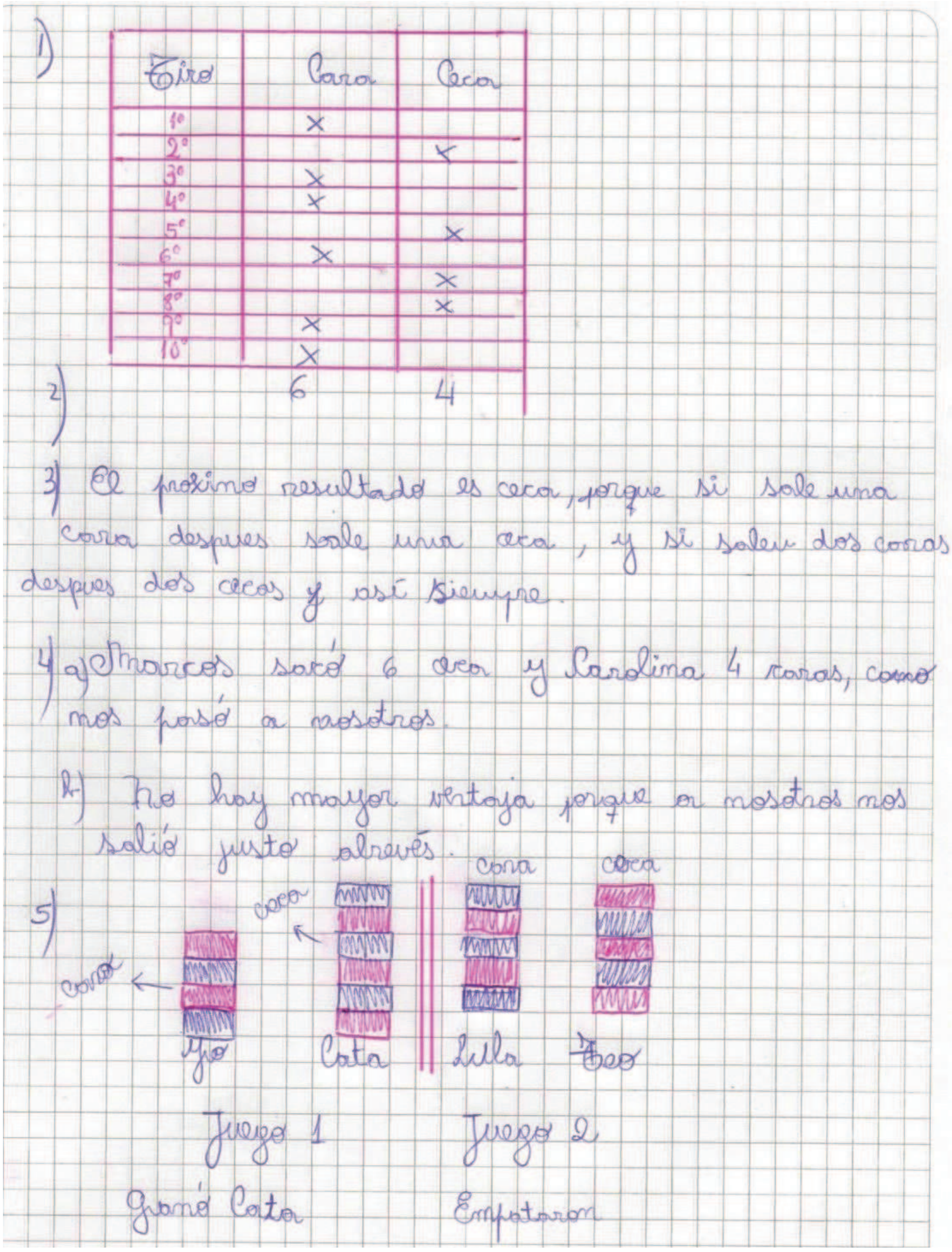
Tauber, L. M. (2010). Análisis de Elementos Básicos de Alfabetización Estadística en Tareas de Interpretación de Gráficos y Tablas Descriptivas. *Ciencias Económicas*, *1*(12), 53–74. http://doi.org/10.14409/ce.v1i12.1146

Villella, J., Crespo Crespo, C., & Ponteville, C. (2000). *No somos anuméricos: un acercamiento a la estadística y a la probabilidad desde y en el aula*. Buenos Aires: Universidad Nacional de General San Martín.

Villella, J. (2010) *TAL VEZ... entre 1 y 100. El desafío de enseñar probabilidad y estadística*. Montevideo - Uruguay: Ediciones Espartaco.

Anexo Metodológico

Fotografías de las producciones de los alumnos/as:



1)

Tiro	Cara	Ceca
1°	X	
2°		X
3°	X	
4°	X	
5°		X
6°	X	
7°		X
8°		X
9°	X	
10°	X	
	6	4

2)

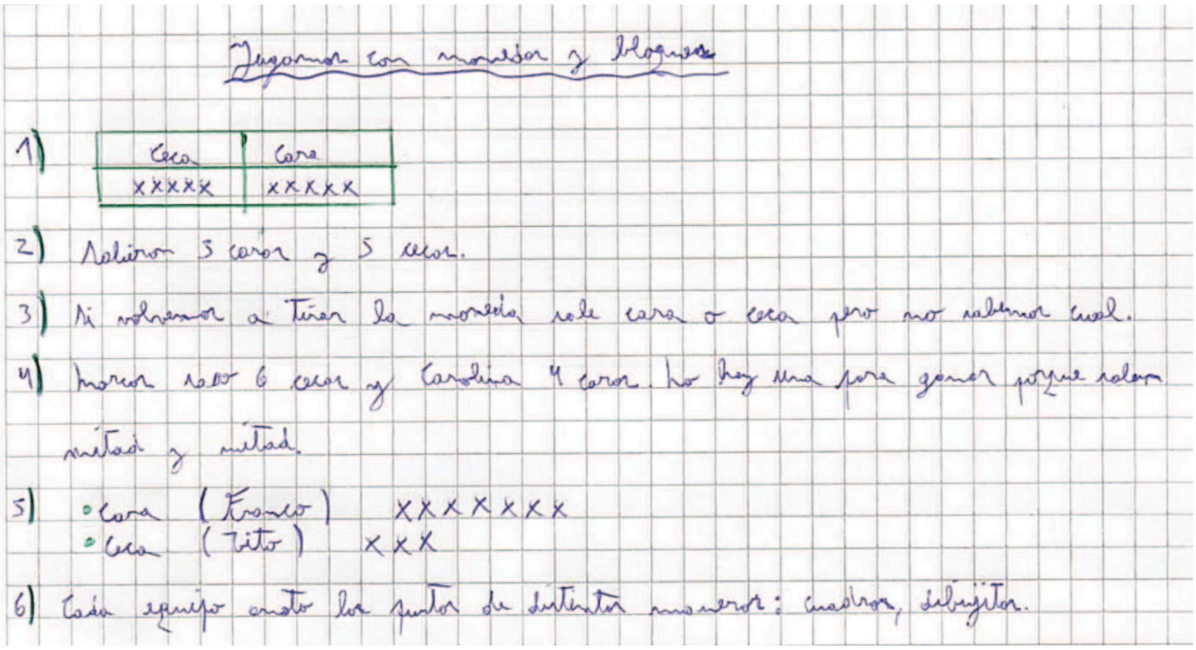
3) El próximo resultado es ceca, porque si sale una cara después sale una ceca, y si salen dos caras después dos cecas y así siempre.

4) a) Marcos sacó 6 ceca y Carolina 4 caras, como nos pasó a nosotros.

b) No hay mayor ventaja porque a nosotros nos salió justo alrevés.

5)

Ilustración 1: Producción de alumna clase N°1.


Jugamos con monedas y bloques

1)

Ceca	Cara
xxxxx	xxxxx

2) Salieron 5 caras y 5 cecas.
3) Si volvemos a tirar la moneda sale cara o ceca pero no sabemos cual.
4) Marcos sacó 6 cecas y Carolina 4 caras. No hay una para ganar porque salen mitad y mitad.
5) • Cara (Franco) xxxxxxx
• Ceca (Tito) xxx
6) Cada equipo anotó los puntos de distintas maneras: cuadros, dibujitos.

Ilustración 2: Producción de alumno clases N° 1 y 2

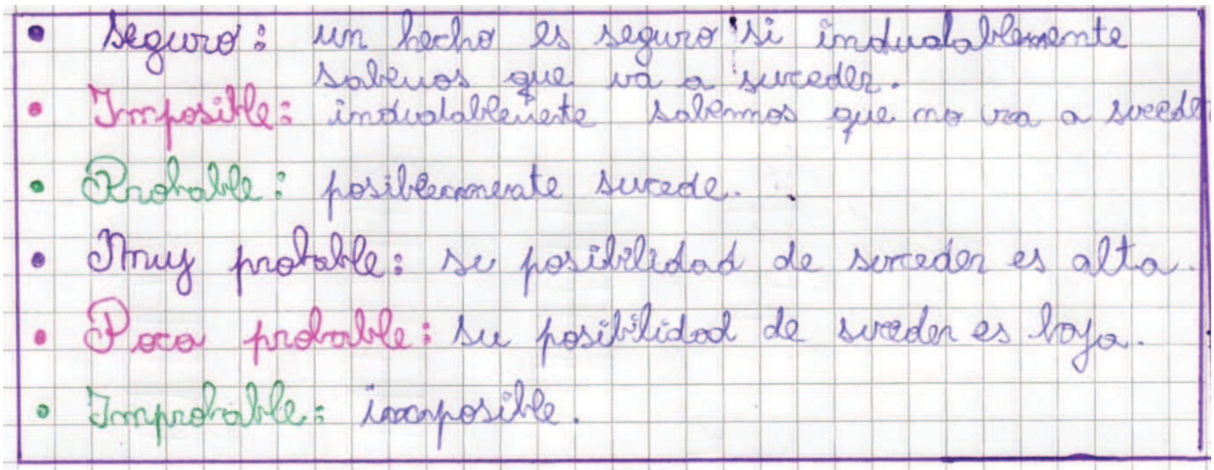

- Seguro: un hecho es seguro si indudablemente sabemos que va a suceder.
- Imposible: indudablemente sabemos que no va a suceder
- Probable: posiblemente sucede.
- Muy probable: su posibilidad de suceder es alta.
- Poco probable: su posibilidad de suceder es baja.
- Improbable: imposible.

Ilustración 3: Construcción de definiciones