Universidad Nacional de San Martín

12-11-2022

# SISTEMAS DINÁMICOS DISCRETOS EN UN MODELO DE CRECIMIENTO CON PBI BALANCEADO ENTRE SOCIOS COMERCIALES

*Discrete dynamical systems in a balanced GDP growth model among trading partners*

Matias Leonel Jaime
EEYN – UNSAM

# Sistemas dinámicos discretos en un modelo de crecimiento con PBI balanceado entre socios comerciales

## *Discrete dynamical systems in a balanced GDP growth model among trading partners*

Matias Leonel Jaime
Licenciatura en Economía – Universidad Nacional de San Martin

**Resumen:**

En el presente trabajo se propone estudiar, mediante un sencillo modelo, el impacto que el comercio internacional puede generar en el crecimiento de las economías a partir de una estrategia coordinada entre ellas.

La principal hipótesis de lo propuesto se basa en asumir que el producto bruto de un país evoluciona asociado al producto bruto de los países con los cuales tiene un fuerte intercambio. Se plantea entonces un modelo dinámico discreto, inspirado en el modelo multisectorial de Leontief y se recrea la idea de crecimiento balanceado entre sectores, aplicada ahora a las economías como un todo. A partir de ello se estudia la existencia de trayectorias de crecimiento balanceado optimo y su implicancia económica. De esta forma, el modelo explora y resalta la importancia del comercio internacional bilateral, como uno de los mecanismos para dinamizar el crecimiento.

**Palabras clave:** Crecimiento balanceado. Sistemas dinámicos. Comercio internacional.

**Códigos JEL:** C61.C62.C67.F15.O41

**Abstract:**

This paper proposes to study, by means of a simple model, the impact that international trade can have on the growth of economies based on a coordinated strategy between them.

The main hypothesis of the proposal is based on the assumption that the gross product of a country evolves in association with the gross product of the countries with which it has a strong exchange. A discrete dynamic model is then proposed, inspired by Leontief's multisectoral model, and the idea of balanced growth between sectors is recreated, now applied to economies as a whole. From this, the existence of optimal balanced growth paths and their economic implications are studied. In this way, the model explores and highlights the importance of bilateral international trade as one of the mechanisms for boosting growth.

**Key words:** Balanced GDP growth. Dynamical systems. International trade.

**JEL Code:** C61.C62.C67.F15.O41

**Tesista:** Matias Leonel Jaime

**Tutor:** Juan José María Martínez

**Centro de estudios:** CIETyMA – Centro de investigación en Economía teórica y matemática aplicada

## Agradecimientos

Me gustaría agradecer en principio a mi tutor en este trabajo, Juan José María Martínez, quien ha sido para mí un gran mentor y referente durante mi etapa de alumno. Tanto en los cursos que ha impartido, como en mi experiencia como ayudante de su catedra y en este trabajo realizado, han sido para mí un antes y un después en mi manera de entender las cosas. Las herramientas y conocimientos adquiridos bajo este tiempo me han forjado con rigurosidad para poder asumir cualquier desafío en el futuro. En segundo lugar, quisiera agradecer a mi familia junto con Caro mi compañera de vida, sin dudas los pilares más importantes de este proceso, porque han sido de gran apoyo emocional a lo largo de estos años, acompañándome en todo momento. Tanto en los felices como en los de duda y crisis. A mi familia agradecer la comprensión de tantas ausencias a causa del estudio. A Caro por ser mi gran soporte emocional además de haberme apoyado en todas mis decisiones. Sin ellos todo esto no hubiese sido posible. También me gustaría agradecer tanto a mis compañeros como a mis amigos de la vida, en los primeros nos hemos apoyado mutuamente a lo largo de la carrera, en los segundos porque me han soportado también reiteradas ausencias a causa de mis estudios. Por ultimo tampoco quisiera dejar de agradecer a la enorme calidad de profesores con los que he tenido el privilegio de estudiar, gracias a ellos he aprendido grandes lecciones tanto académicas como éticas.

# Índice

## Contenido

## 1. Introducción

Antes de iniciar la introducción a cada tema relacionado con el modelo de trabajo, se hará una breve introducción sobre los motivos que inspiran este trabajo. En principio, este modelo está inspirado en el modelo dinámico de Leontief multisectorial. Tomando esta idea, planteada para obtener tasas de crecimiento balanceado entre los sectores de la economía, y entendiendo que el comercio internacional puede resultar un factor clave para el crecimiento económico. Se combinan estos dos tópicos, a la hora de elaborar el modelo, el cual pretende estudiar el comportamiento y la incidencia del comercio internacional como factor fundamental para obtener resultados óptimos en las economías que participen. Por esto, se hace un repaso de la literatura y el debate sobre estos aspectos, esto brinda suficiente motivación para realizar este trabajo. En resumen, los temas en cuestión son, principalmente comercio internacional y crecimiento balanceado. Luego se hace un breve repaso por el modelo dinámico de Leontief, sus características y teoremas necesarios. Además, se hace un repaso de sistemas dinámicos discretos y la técnica necesaria para el análisis del comportamiento dinámico. Y, finalmente, se aborda el modelo en cuestión que tiene por objetivo estudiar y obtener resultados a favor del comercio internacional como dinamizador del crecimiento. Siendo este un factor clave para economías que puedan resultar estratégicas en términos de intercambio comercial. Por último, se hace la pertinente discusión de los resultados.

## 2. Comercio internacional

Con el paso del tiempo el comercio internacional ha dado lugar a un mundo totalmente globalizado. Actualmente, casi todas las naciones del mundo mantienen, en mayor o menor medida, algún grado de apertura comercial. Las consecuencias y beneficios de la apertura comercial, han dado lugar a extensos debates, con resultados a favor y en contra de ella; algunos también no tan concluyentes.

### *2.1 Un breve repaso sobre este debate*

La teoría más **tradicional** del comercio internacional, surge con los modelos de ventajas absolutas de **Adam Smith** y de **Ricardo** con su modelo de ventajas comparativas. En principio, Smith, en su modelo sostenía que un país debería especializarse en la producción de aquellos bienes donde tuviera ventajas absolutas e importar todos aquellos donde tuviera desventajas absolutas o careciera de eficiencia (**división internacional del trabajo**). Esta teoría, sin embargo, presento algunas inconsistencias, como por ejemplo, que pasaría con aquel país que careciera de alguna ventaja frente al resto del mundo. Ricardo, llego entonces para subsanar esta cuestión, con su teoría de ventajas comparativas. Así, postulo, que aun si una economía tuviera alguna desventaja absoluta, esta podría tener **costes relativos menores** (medidos en termino de otro bien) frente a alguna otra economía, entonces el intercambio podría ser posible y además beneficioso. Sin embargo, en ambas teorías persistían algunas debilidades que las alejarían de la realidad.

A raíz de esto, fueron surgiendo otros modelos de comercio internacional. El modelo de Ricardo, por ejemplo, fue sufriendo algunas modificaciones de otros autores. Estos, utilizaron algunos axiomas un poco más realistas, que mejoran los fundamentos, acercándola más a la realidad. Por ejemplo, Haberler **(1936)**, con su teoría del coste de oportunidad, logro disuadir algunas de estas cuestiones. Por otra parte, Heckscher **(1919)** y Ohlin **(1933)** han ejercido gran influencia para determinar las causas del intercambio comercial mundial. El modelo de **Heckscher-Ohlin**, como se conoce, postula que un país enfocara sus exportaciones en el bien con el cual utiliza más intensivamente su factor más abundante, en términos relativos. Este modelo, dio lugar a 3 tesis importantes:

1) El teorema sobre igualación del precio de los factores
2) El teorema de Stolper-Samuelson
3) El teorema de Rybczynski

La **"nueva"** teoría del comercio internacional ha iniciado un periodo con infinidad de trabajos al respecto. Principalmente, viene a proponer una segunda razón para que los países tengan estímulo al comercio internacional, esta es, la presencia de **economías de escala** (rendimientos crecientes). A saber, estos modelos incorporan la posibilidad de contextos de competencia imperfecta, diferenciación de productos, comercio intraindustrial, dumping reciproco, etc. Algunos autores: Dixit y Stiglitz **(1977)**, Krugman **(1979)**, entre otros.

Otros modelos más recientes, los denominados "novísimos", se encargan de darle un papel interesante a las empresas individuales. Estos modelos, incorporan la heterogeneidad entre empresas a nivel nacional. En otras palabras, se hace a un lado el concepto de empresa representativa y se permite la diferencia de productividades entre empresas de la misma industria. Esto provoca resultados interesantes dentro del sector y a nivel macro (salida de empresas con baja productividad, desplazamiento de estos recursos a aquellas con mayor productividad, un incremento de la eficiencia a nivel industrial, se amplían las ventajas comparativas y se obtiene mayor bienestar). Algunos autores: **(Bernard, 2007)**, **(R. E. Baldwin y R. Forslid, 2006)**, **(Jensen, 2007)**, entre otros.

Por otra parte, en el otro espectro, hubo algunos economistas que defendieron la protección de la industria nacional, sustentando sus teorías con lo que se denominó industrialización mediante sustitución de importaciones **(Hirschman, 1980; Furtado,1985; Fishlow, 1987; Presbich, 1983)**. Esta corriente, tuvo un gran impulso en varios países de Latinoamérica, con el espíritu de poder generar mayor desarrollo. Con esto librarse, además, de la dependencia de los países centrales y hacer frente a la baja especialización. La teoría sostiene que, mediante este proceso, se obtendría un gran desarrollo en el sector industrial manufacturero, que resolvería los problemas estructurales de las economías subdesarrolladas. Pero una condición necesaria para resolver este tipo de problemas estructurales, consistía en poder lograr luego, exportaciones con mayor valor agregado. Esto resulto ser bastante complejo debido a la falta de planificación estratégica, y a la baja competitividad frente a países desarrollados.

Sin embargo, este trabajo no pretende extenderse en la infinidad de modelos existentes. El lector interesado puede recurrir, por ejemplo, al libro de Economía internacional de Paul Krugman **(2014)**.

Además de los modelos teóricos, también existen trabajos cuantitativos de corte econométricos, con el fin de trabajar sobre los datos, y estudiar no tanto las causas, sino los efectos del comercio internacional. En otras palabras, analizar la experiencia empírica.

### **2.2** Algunas reflexiones sobre esto:

Un ejemplo de la incidencia del comercio internacional es el caso de los países del este de Asia **(Tahir y Ali, 2014)**.

Una mayor apertura comercial aportara un gran flujo de ideas y conocimiento para el desarrollo y el crecimiento **(Grossman y Helpman, 1991; Romer, 1993)**.

Yanikkaya **(2003)**, encontró un resultado positivo y significativo sobre el crecimiento utilizando regresiones de corte transversal en un panel de más de 100 países en desarrollo y desarrollados.

Cecchini y Lai-Tong **(2008)**, utilizo también datos de panel en siete países, donde concluyo que el crecimiento económico necesita, apoyarse de la transferencia de tecnología para que la apertura comercial de resultados favorables.

Zeren y Ari **(2013)**, se enfocó en países del G7 donde encontró una relación muy estrecha entre comercio internacional y crecimiento económico.

Mercan **(2013)**, encontró resultados similares para países emergentes.

Molero, L., Anchundia, J., Patiño, R., y Escobar, Y. **(2020)**, han realizado un extenso trabajo con regresiones de corte transversal y series de tiempo. Donde han encontrado resultados positivos, pero escasamente significativos.

Sin embargo, también existen resultados poco favorables, y en algunos casos hasta perniciosos, para algunas economías en estudio. Garate, Tablas y Urbina **(2010)**, encontraron para El Salvador que la apertura comercial fue un fracaso. Nduka **(2013)**, estudio el caso de Nigeria donde tampoco encontró resultados favorables. En el caso de Ecuador, Maridueña **(2017)**, dio con resultados escasos sobre el crecimiento económico.

Claro está, que todo esto depende, en gran medida, de la heterogeneidad de las economías entre sí, el escenario en el tiempo y situaciones que pueden presentarse con algunas externalidades positivas o negativas, ya sea para un país en particular o a nivel global (caso COVID-19). Por otra parte, cabe aclarar que, si bien el comercio internacional exhibe, en los datos, una influencia positiva sobre el crecimiento económico, **no es el único factor** que incide sobre esta tasa de crecimiento. En este sentido, este trabajo en cuestión, no pretende suponer que no existen tales factores adicionales al comercio internacional, que puedan permitir obtener una mejora en la tasa de crecimiento. Sin embargo, se considera que este puede ser un factor importante para potenciar las posibilidades. Así, inspirándose en un modelo dinámico como el de Leontief, que será introducido posteriormente, el cual explica el crecimiento balanceado entre sectores mediante una planificación estratégica. Se pretende suponer que esto, podría pensarse análogamente entre países que puedan resultar socios comerciales estratégicos. Si estos, pudieran coordinar y planificar un intercambio comercial estratégico, se podría alcanzar una trayectoria de crecimiento balanceado en simultaneo que podría ser óptima. En resumen, en el supuesto caso donde hubiera coordinación y planeamiento, se podría obtener una trayectoria de crecimiento balanceado que, a su vez, podría ser un óptimo en simultaneo para estas economías. Con esto, se podría reforzar la idea de que el comercio internacional puede potenciar el crecimiento económico. Se reitera, por supuesto, que existen muchos otros factores que lo influyen. Pero es importante pensar en la influencia positiva que podría tener este intercambio entre países estratégicos, si hubiese cierta coordinación.

## 3. Crecimiento Balanceado

La teoría de Crecimiento balanceado fue planteada principalmente por el economista Ragnar Nurske (1907-1959). Este plantea la hipótesis de que un gobierno de cualquier país necesita realizar grandes inversiones en varios sectores de forma simultánea, como un mecanismo de gran impulso en todos los sectores de la economía. A su vez, sugiere que, se debe sostener un balance en las tasas de crecimiento de todos los sectores, además de cumplir necesariamente, que las tasas también encuentren un balance en el lado de la demanda. En países subdesarrollados, por ejemplo, generalmente esto implicaría generar un impulso en las áreas industriales y agrícolas simultáneamente. Esto ampliaría el tamaño del mercado, aumentaría la productividad y proporcionaría un incentivo para que el sector privado invierta. En principio, es fundamental y muy necesario, lograr transmitir la confianza suficiente para lograr que el sector privado tenga incentivos para invertir. Por esto, la **planificación** puede resultar un **factor clave para transmitir** este mensaje de seguridad. En otras palabras, Nurske plantea la necesidad de impulsar en forma conjunta el crecimiento de los sectores agrícola e industrial, en este caso, para que en esa sinergia cada sector genere un mercado de bienes para el otro. Esta teoría, como se observará, más adelante en profundidad, originalmente tiene características de análisis micro-estático, pero surgen motivos para creer que puede resultar conveniente adaptarla a un análisis macro-dinámico. Esta cuestión es el motivo de inspiración de este trabajo, que por supuesto, lejos está de pretender ser un fiel reflejo de la realidad. Cabe aclarar que el modelo planteado en este trabajo es una simplificación de la misma para fines teóricos y académicos, que sirven de utilidad para entender ciertos comportamientos.

Antes de avanzar más en profundidad con la teoría, se pueden plantear y distinguir 3 formas de empleo del concepto de balance **(Revuelta, 1960)**:

**1)** Una no técnica

**2)** Otra técnica general

**3)** Y una técnica más especifica

**1)** Esta se emplea con frecuencia para describir un crecimiento sostenido que no provoca grandes alteraciones en lo social. Este resulta equilibrado en el sentido de que todas las clases se benefician y el éxito es una cuestión de elogio para el país o periodo. Este empleo tiene una raíz más emocional.

**2)** En el sentido técnico más general, se refiere al equilibrio entre la inversión prevista y el ahorro previsto. Básicamente, la inversión resulta equilibrada si se ajusta a los recursos disponibles, de lo contrario podría ocasionar inflación. En ocasiones algo de inflación puede ser de utilidad para "acelerar el motor" pero esto puede resultar contraproducente, más en países subdesarrollados. Para estos países es tan peligroso como "tomar un tigre por el rabo" **(Revuelta, 1960)**.

Esta idea de balance o equilibrio puede no significar que necesariamente el equilibrio tenga que ser solamente en el nivel general, también puede tener consecuencias en recursos específicos. En otras palabras, **no** solo un exceso de demanda general puede tener efectos negativos, sino también en recursos o sectores específicos generando un fallo o "**embotellamiento**" en este mercado.

**3)** En el sentido más específico, la idea de equilibrio es la que se origina en Adam Smith. Se refiere específicamente al equilibrio entre la división del trabajo, el volumen de producto y la dimensión del mercado.

Bajo el ala de este concepto más específico podemos entender de donde radica la hipótesis de Nurske. Y para países subdesarrollados, es donde termina siendo útil entender que es necesario este equilibrio del mercado y de la oferta. Es necesario generar mejoras en la eficiencia, ya que esta, dará lugar a nuevos mercados. La **expansión simultanea** creara una base más amplia de la estructura productiva, impulsando el desarrollo de la infraestructura, creando nuevas necesidades y bienes, y estos nuevos mercados impulsaran, a su vez, el crecimiento. Por ejemplo, si se impulsan los sectores educativos, de salud, transporte, energía, vivienda y los demás sectores de bienes y servicios, todos al mismo ritmo. Entonces la renta real se incrementará y dará lugar a mayores inversiones, "Olas de inversores" en términos de Schumpeter.

Es interesante enfocar el análisis en lo que respecta a países subdesarrollados, siendo que esto puede resultar de utilidad para la Argentina o la región Latinoamericana. Normalmente, un país subdesarrollado es exportador de bienes primarios o agrícolas e importador de manufacturas. Existen excepciones a la regla, pero, generalmente esto es un común denominador entre los países subdesarrollados. Por esto es necesario también el balance en el sector externo de la economía. A su vez, también es necesario contemplar que la productividad del sector agrícola suele ser más baja que la media total de la economía, y más baja que la del sector no agrícola. Según Revuelta **(1960)**, la relación de un gran número de países se aproxima bastante a la forma:

$$A = \frac{2}{3} N$$

donde A es la producción por persona empleada en la agricultura y N la producción por persona empleada en la economía en su conjunto.

Así, se concluye que, si se modifica la estructura productiva de una economía subdesarrollada, esto es, modificando la composición por una donde participe más el sector no agrícola. Esto puede resultar un instrumento para el desarrollo económico. Sin embargo, como se mencionó anteriormente, esta transferencia debe justificarse mediante un incremento de la productividad o de la demanda real, de lo contrario no puede ser sostenida. Entonces, una mayor producción por trabajador no agrícola es representada por una mayor productividad neta de su trabajo y no solo un "input" de capital. Así, se produce un efecto multiplicador para el cambio estructural. Esto pareciese ser como la paradoja del huevo o la gallina. Pero ahí nace la doctrina de crecimiento balanceado que fue desarrollada por Nurske principalmente, seguida por Tscitovski, Hilgerdt, Hirschman o antecesores también como Young, Rosenstein-Rodan o Hans Singer, entre otros.

Se ha demostrado entonces que, bajo ciertos requisitos, la transferencia desde un sector a otro puede resultar un mecanismo propulsor del crecimiento económico. Esto es cierto para una economía cerrada, y para el caso de una economía abierta también lo es, pero con cierto rezago. Por esto es importante analizar el comportamiento con el paso del tiempo. Además, la dimensión del mercado también ofrece límites a la transformación de la estructura del empleo. La industria, por ejemplo, no podrá expandirse porque necesita mercados más amplios para la agricultura. El mercado de productos agrícolas, a su vez, se ve limitado por la ausencia de oportunidades de empleo en el sector industrial, esto fuerza a la agricultura a alimentar demasiada población en su sector. Por lo tanto, las industrias individuales no pueden expandirse porque otras industrias no se han desarrollado lo suficiente para proporcionar mercados. De aquí surge la idea de generar un "**gran impulso**" en simultaneo en todos los mercados.

Existen antecedentes previos a los desarrollados por Nurske que sirven como un puente entre el, y Adam Smith. Young, en su artículo **"Rendimientos crecientes y progreso económico"** publicado en el **Economic Journal** en **1928**, resume todo esto en sus conclusiones:

*"Primero, el mecanismo de rendimientos crecientes no se descubre adecuadamente observando los efectos de las variaciones en el tamaño de una firma individual o de una industria particular, porque la progresiva división y especialización de las industrias no constituye una parte esencial del proceso por el cual se realizan los rendimientos crecientes. Lo que se requiere, es que las operaciones industriales se vean como un todo interrelacionado. Segundo, el asegurarse rendimientos crecientes depende de la progresiva división del trabajo, y las principales economías de la división del trabajo, en sus formas modernas, son las economías obtenidas usando mano de obra de modos indirectos o rebuscados. Tercero, la división del trabajo depende del tamaño del mercado, pero el tamaño del mercado también depende de la división del trabajo. En esta circunstancia yace la posibilidad de progreso económico, aparte del progreso resultante de nuevos conocimientos que los hombres son capaces de ganar ya en las persecuciones de sus intereses económicos o no económicos".* **(Young, 1928)**

Estas conclusiones apuntan precisamente a la influencia de cada sector en el conjunto, la tasa de crecimiento de una firma depende, a su vez, de las tasas de crecimiento de otras firmas. Esto es a lo que los autores llaman complementariedades estratégicas y "economías externas". Así, la división del trabajo depende finalmente de la división del trabajo. Por paradójico que suene, el circulo vicioso parece brindar la respuesta. Esto, despierta el interés por abandonar el análisis micro estático y tradicional, y optar por un análisis macro dinámico.

Una crítica sobre esto, es que no se consideran las elasticidades de oferta y demanda de cada sector. Además, solo brinda una explicación de cuál es el mecanismo que mantiene girando el proceso, pero nada dice de como iniciarlo. ¿Sera posible generar un shock exógeno para darle origen o sencillamente depende de la espontaneidad del proceso?

A raíz de esta última cuestión se introduce en el debate las ideas de Paul N. Rosenstein-Rodan **(1943)**, quien asegura que el tamaño de la región es un punto importante para pensar en empresas de tamaño óptimo, y así poder minimizar los riesgos de la inversión. En otras palabras, cuando se evalúa el camino de la industrialización entre una instancia de aislamiento o una de integración con el mundo esta última puede resultar **más favorable** y menos costosa. Desde acá dos cuestiones marcan el rumbo e inspiración de este trabajo por un lado la posibilidad de analizar la **acción del estado** para planificar y generar un **gran impulso** que haga girar la rueda del proceso de desarrollo. Y por otro lado la posibilidad de repensar el crecimiento balanceado como mecanismo de **integración entre países**. En otras palabras, pensar en la **complementariedad, pero en términos de comercio internacional**.

Por supuesto que esto no queda exento de críticas. Por ejemplo, afirmar que el tamaño óptimo de una firma depende del tamaño de la región es bastante difuso. Más bien lo importante sería la dimensión del mercado. Por otro lado, también se tiene que Rosenstein-Rodan no resuelve como coordinar la industrialización planeada a gran escala utilizando las ventajas internacionales. Esto último resulta ser un gran desafío. En sí mismo, un Estado a veces tiene dificultades para resolver la ineficiencia del marco institucional por una desavenencia entre el costo privado y social **(Pigou, 1946)**. Por eso pensar en un marco internacional resulta ser más desafiante, pero no inviable.

Es inevitable notar que estos autores tuvieron influencia sobre el trabajo de Nurske. Otra influencia significativa surge de la mano de Hans Singer **(1950)** muy en concordancia también con Hilgerdt **(1945)**. Singer **(1950)** señalo la importancia del comercio internacional en el caso de países subdesarrollados y los efectos favorables de la elevada productividad en las industrias de exportación. Por supuesto que Singer contempla el impacto que genera la inversión de países más desarrollados en otros con menor nivel de desarrollo. Lo interesante aquí es que se da lugar, además, al debate sobre el efecto de los "términos del intercambio" **(Presbich, 1987)**. Singer sugiere que existe cierta ambivalencia entre estos y los países subdesarrollados. A saber, en tanto los términos del intercambio resulten favorables, un país subdesarrollado a pesar de tener los medios, carece de los incentivos necesarios para la industrialización (excepto que intervenga el Estado); por el contrario, cuando no son favorables, ocurre lo opuesto. Tanto Hilgerdt como Singer ofrecen un enfoque interesante sobre la cuestión de la inversión y el comercio exterior. Estas dos cuestiones han dado lugar a un gran caudal de trabajos sobre los efectos del comercio internacional sobre la inversión, el crecimiento y el desarrollo económico.

Rothbarth **(1946)** por ejemplo, exhibió una opinión opuesta a la de Hilgerdt. En uno de sus últimos escritos donde compara la eficiencia de la industria estadounidense y la británica, uno de los argumentos interesantes que esboza, es que se debe tener en cuenta que se dificulta comparar el tamaño de sus mercados sin contemplar antes los costos del transporte. A partir de esto, exhibió evidencia que afirma que, Estados Unidos en 1870 poseía un tamaño de mercado menor al británico y, a pesar de esto, poseía una eficiencia relativamente superior. Con lo cual, esto lleva a concluir que el tamaño del mercado no necesariamente determina el nivel de eficiencia.

Por lo pronto, el debate abre grandes interrogantes sobre si el tamaño del mercado es determinante, si el comercio internacional es beneficioso o no, si lo que se necesita es un crecimiento equilibrado o desequilibrado, si es posible la planificación por parte del Estado para generar un gran impulso, o si el análisis micro-estático queda obsoleto frente un análisis macro-dinámico. Como se puede ver, muchos de estos interrogantes despiertan el interés de este trabajo.

Ragnar Nurske en su doctrina explicita de crecimiento balanceado ofreció formas de resolver las dificultades del mercado.

*"Dejemos el sistema actual solo, en situación de punto muerto y de equilibrio a un bajo nivel. Superpongamos sobre este sistema en punto muerto un segundo sistema autocontenido o autónomo que proporciona al mismo tiempo mercados y ofertas adicionales. Creemos este segundo sistema autocontenido dando énfasis al sector que, en cualquier caso, tendría que expansionarse en el proceso de crecimiento económico y que es también el sector en que proyectos simultáneos pueden apoyarse mutuamente con la mayor facilidad. La forma en que esto puede realizarse es mediante una ola simultánea de nuevas fábricas, compuestas de tal manera que aprovechan plenamente las complementariedades y economías externas en el lado de la oferta y las complementariedades de los mercados en el lado de la demanda."* **(Nurske, 1954)**

Por supuesto que la proposición no quedo exenta de críticas, si se piensa en términos de países subdesarrollados, no parece sencillo contener un sistema dentro de otro de forma autónoma. Resulta difícil creer que este nuevo sistema de mercados adicionales no tenga relación alguna con el sistema en punto muerto. La demanda de alimentos se incrementará para la población que obtiene una mejora en la renta real, con lo cual es necesario que también se hagan inversiones en el sector agrícola para sostener este incremento adicional. En otras palabras, este gran impulso en la industria requiere inversiones a gran escala en el sector agrícola. **M. Fleming (1959)** se expresó sobre este punto afirmando que la doctrina de crecimiento balanceado supone una relación complementaria entre industrias, pero que, esta relación encuentra su limitación en la oferta de los factores, volviéndose competitiva.

Además, si un país es subdesarrollado, difícilmente cuente con los recursos necesarios para hacerse de inversiones de tal magnitud. Contrariamente, si contara con tal magnitud de recursos necesarios, dudosamente se estaría hablando de un país subdesarrollado. Con lo cual, si esto fuese así, la doctrina parece más una teoría que explica cómo mantener en movimiento la rueda del desarrollo de un país desarrollado, que una forma de escape de este punto muerto del que se encuentra un país en subdesarrollo. El desafío esta, entonces, en lograr hacerse de los recursos necesarios para salir de este punto muerto, sorteando, además, el problema de las inelasticidades del tipo de bienes que comúnmente sufren los países subdesarrollados. Este desafío parece ofrecer múltiples obstáculos que complejizan la idea de planificar un gran impulso en países con estas características. Pero existen situaciones u oportunidades, en algún momento del tiempo, que brindan las condiciones necesarias para lograr el gran impulso, lo importante es, en realidad, poder actuar con rapidez y estrategia para aprovechar el impulso. Es crucial, además, que el impulso se encuentre balanceado tanto en la oferta como en la demanda. En este sentido una condición necesaria para el éxito de esta planificación, es un marco institucional robusto y eficiente.

Tanto Young como Rosenstein-Rodan y Nurkse hacen mención en su análisis, a las "economías externas". En este sentido, esta forma de "economías externas" parece ser más amplia que la Marshalliana. Scitovsky **(1954)** hace una distinción interesante entre el concepto que se aplica en la teoría del equilibrio y el utilizado para la industrialización de países subdesarrollados. En este segundo concepto implica el efecto que tienen las acciones de los productores sobre los beneficios de otros productores. Scitovsky **(1954)** plantea 3 ejemplos en los que aparentemente la teoría del equilibrio general es inaplicable a problemas del desarrollo. Lo importante del aporte de este autor es que logra dejar bien definida la terminología de la doctrina.

Finalmente, la formulación de Nurske queda respaldada por un lado por el enfoque de comercio internacional de Singer y por otro por la definición de "economías externas" de Scitovsky.

Celso Furtado **(1954)** destaco en principio las buenas intenciones y el esfuerzo de Ragnar Nurske por su análisis sobre los problemas a los que se enfrentan las economías subdesarrolladas. Y en base a esto, esbozo algunos argumentos interesantes de los que se deberían contemplar debido a la realidad económica y social distinta a lo de los países desarrollados. En primer lugar, es interesante el análisis sobre el surgimiento de las teorías de desarrollo producto de las políticas cíclicas y anti cíclicas, y la coordinación de los elementos dinámicos del sistema económico. Por otra parte, destaco el aporte de los modelos de **insumo-producto** que implican una visión más clara de las interdependencias del sistema, y como luego se fueron desarrollando nuevos trabajos sobre la **dinámica económica** por Harrod y Domar, entre otros. Furtado, en su artículo, encuadra la teoría de Nurske sobre desarrollo económico en una del tipo Schumpeteriana. Remarco, además, que el aspecto central de la doctrina es el límite que implica la dimensión del mercado. En este sentido, Furtado minimizo el problema que puede generar este aspecto como desestimulo de la inversión. Afirma, además, que, si un país subdesarrollado pudiera realizar inversiones con vista al **mercado externo**, este problema no existiría. Por esto, lo fundamental seria que exista un **mercado externo en expansión**.

Una cita interesante respecto a las “olas de inversión” de Nurske:

*"iniciar un proceso de desarrollo con sus propios recursos y por la acción espontanea de sus empresarios es, para usar una expresión corriente, como elevarse uno mismo tomándose de sus propios talones"* **(Furtado, 1954)**

Otra de las críticas que merece mencionarse a Nurske surge de un autor más contemporáneo, Currie **(1966)** criticó a Nurkse y a otros economistas del desarrollo (entre estos los influenciados por el modelo de Harrod-Domar) ya que se desviaba la atención de la dependencia de la inversión de la demanda final de los consumidores, además de la distinta demanda potencial para los distintos sectores, entre estas las exportaciones, en diferentes escenarios de política. A causa de la excesiva concentración en las proporciones de ahorro e inversión agregadas. Además, Currie argumento que, en el caso de los países latinoamericanos, por ejemplo, se podrían haber evitado algunas distorsiones no naturales que se asociaban al mal manejo de la política monetaria y los niveles de inflación crónicos. Sin tener que atribuir la responsabilidad a los problemas estructurales o a los términos del intercambio.

En base a Currie **(1966)**, Hirschman **(1967)** en su tesis argumento que es preferiblemente más conveniente utilizar una estrategia de crecimiento desbalanceado. En su tesis, creía que el recurso más escaso en estos países subdesarrollados era “su capacidad para tomar decisiones”. Además, que “su actividad directamente productiva” era estratégica, y no su “capital social fijo”. Por ende, el sector privado debería ser estimulado por las tensiones y por las oportunidades que esta estrategia desbalanceada podía crear.

Lewis **(1955)** también realizo su contribución estableciendo ciertas condiciones:

*“Cuando hablamos de la industria y la agricultura creciendo ‘juntos’ o a ‘tasas apropiadas’ o ‘en balance’, en una economía cerrada, nos referimos a las tasas determinadas por la propensión marginal al consumo de las comunidades.* ***La economía abierta es más complicada****. Así, en el mundo real debemos mantener un balance entre importaciones, exportaciones, industria y agricultura y no solo entre dos de ellas”* **(Lewis, 1955)**

Entonces, una lección que se puede aprender de la doctrina del crecimiento balanceado, es que el incentivo a invertir aumentara mucho con la expectativa de mayores mercados e ingresos. Por lo tanto, es indispensable que exista una **expectativa de crecimiento real**, esto último sería lo más efectivo. Para cualquier programa de desarrollo de algún país subdesarrollado lo fundamental es crear una sensación de confianza de que lo planificado va a efectuarse. Es necesario transmitir que lo planeado será efectivo. La formulación de programas de desarrollo puede constituir una ayuda en la creación de dicho movimiento hacia adelante. El crecimiento balanceado puede jugar un papel en la mejora de lo que en la teoría del ciclo económico es quizás, a veces, denominado **"situación de confianza económica"**. En términos de Nurske, un punto muerto a un bajo nivel de ingresos y mercados puede ser a causa de un excesivo pesimismo autojustificado sobre los mercados futuros, particularmente en aquellos países donde existe una larga historia de estancamiento o de dificultades económicas. No es tan sencillo, sin embargo, que el optimismo excesivo se justifique a sí mismo, la limitación ineludible de los recursos se encuentra en el camino. Pero ahí donde el pesimismo excesivo, más que por una limitación de los recursos, ha determinado un equilibrio a un bajo nivel, **la doctrina del crecimiento balanceado adquiere considerables méritos** tanto teóricos como prácticos. Por otra parte, un **mercado externo en expansión** puede resultar una pata fundamental si se logra el balance entre este y todos los demás sectores.

En resumen, luego de esta revisión de la literatura, y puesto en debate a los especialistas. Se puede concluir que la doctrina de crecimiento balanceado puede resultar un gran instrumento teórico y práctico para el crecimiento y el desarrollo económico. Siempre y cuando se cumplan ciertas condiciones que parecen fundamentales. También se ha visto que encontrar mercados exteriores en expansión puede resultar una herramienta importante, si se determinan tasas balanceadas con el resto de los mercados de la economía. Además, pensar en un modelo macro dinámico que contemple el comercio internacional para dar lugar a trayectorias de crecimiento balanceado entre las economías, en lugar del tradicional análisis micro estático puede ser una elección acertada.

En lo que sigue, se realiza un breve repaso por el modelo de insumo-producto de Leontief y su evolución al plano dinámico teniendo en cuenta la doctrina de crecimiento balanceado.

## 4. El modelo dinámico de Leontief

### 4.1 Modelo de Harrod-Domar

Antes de comenzar a analizar este modelo, merece la pena mencionar sus antecedentes en el **modelo de Harrod-Domar (1939-1946)**. Estos economistas, ambos de manera independiente, realizaron trabajos que tuvieron una vinculación muy estrecha. Tal es así, que terminaron siendo considerados en conjunto. Este modelo buscaba explicar la relación entre la inversión, la tasa de crecimiento y el empleo para una economía con crecimiento en estado estacionario.

Los supuestos que caracterizaron este modelo son:

- Producción de un único bien que puede ser utilizado para consumo o inversión
- Las cantidades de capital y trabajo están dadas de manera única
- No existen retrasos en las decisiones de consumo, inversión y producción
- Ahorro e inversión se refieren a ingresos del mismo periodo y estos se encuentran ya netos de depreciación
- Por último, la capacidad productiva de un activo o de toda la economía es un concepto que se puede calcular

La idea central del modelo plantea que el empleo depende del ingreso nacional que, a su vez, está relacionado con la inversión. Cuando se incorpora la inversión en el ciclo económico, no es posible ignorar el crecimiento. Si bien para una firma la inversión puede significar más capital y menos mano de obra, para la economía en su conjunto representara más capital, pero no necesariamente menos mano de obra. Si la población crece a una tasa constante, seguramente existirá una tasa de crecimiento del ingreso que dará lugar a aprovechar a ambos factores.

Para determinar la tasa de crecimiento que asegura el nivel de pleno empleo, y dado que el modelo supone cantidades fijas. La función de producción para el único bien tiene la forma:

$$Y = \min(\frac{K}{v}, \frac{L}{u})$$

Que es una función del tipo Leontief la cual da lugar a un mapa de isocuantas. Donde K y L son el capital y trabajo respectivamente, y donde u es el uso de la capacidad instalada y v es el coeficiente efectivo de capital por unidad de producto. Si la utilización de los factores es eficiente se cumple:

$$Y = \frac{K}{v} = \frac{L}{u}$$

También significa que: $$\frac{K}{Y} = v$$

A su vez, también existe una tasa de ahorro constante s. Y una tasa de crecimiento de la mano de obra n por cuestiones demográficas.

En la **Figura 1**, se puede observar cómo queda conformado el mapa de isocuantas.

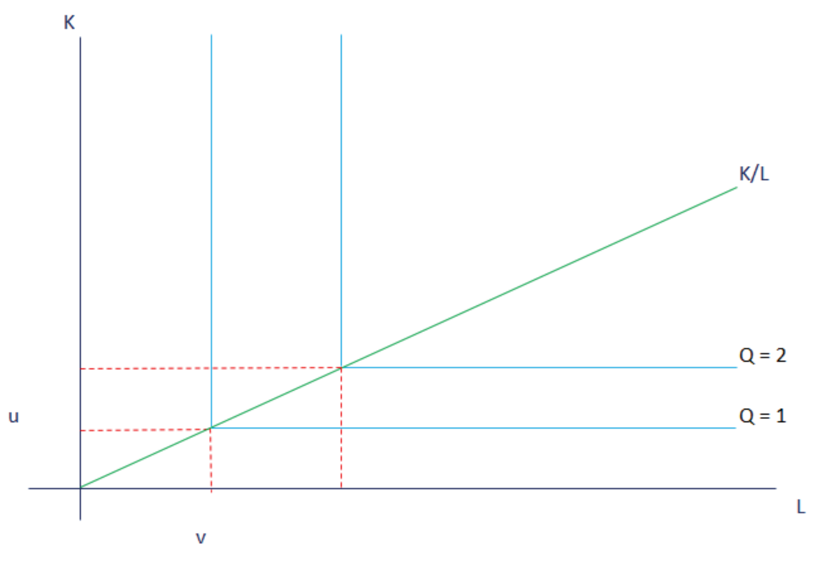


Figura 1 – Mapa de isocuantas, utilizando proporciones fijas -

La tasa de crecimiento del stock de capital queda determinada por:

$$\frac{dK}{K}=\frac{I}{K}=g$$

Por lo tanto, la **senda de crecimiento balanceado** a esta misma tasa:

$$\frac{dY}{Y}=\frac{dK}{K}=\frac{I}{K}=g$$

Se sabe que la inversión debe ser igual al ahorro si se iguala el ingreso con la capacidad productiva: $I=S=s.Y$ .

Reemplazando: $$\frac{dY}{Y}=\frac{sY}{K}=\frac{s}{K/Y}=\frac{s}{v}=g$$

Si se cumple que: $$g=\frac{s}{v}=n$$

Entonces, **la senda de crecimiento balanceado es estacionaria**. En otras palabras, todas las variables permanecen **constantes en términos per cápita**.

En este modelo, $g_w$ se interpreta como la tasa de crecimiento que se necesita para que los empresarios estén seguros que han invertido de manera correcta, y $v_r$ es el stock de capital adicional demandado realmente por ellos.

Por lo tanto debe cumplirse: $$g_w=\frac{s}{v_r}$$

Harrod llamo a esta tasa de crecimiento necesaria, $g_w$ , como la tasa de crecimiento garantizada. Si esta tasa se iguala con la tasa efectiva de crecimiento $g$ entonces:

$$\frac{s}{v}=\frac{s}{v_r}$$

Si esta condición se cumple, entonces $v=v_r$, con lo cual esto garantiza que los empresarios queden satisfechos con sus decisiones. Asi, los empresarios adoptaran una posición para seguir creciendo a la misma tasa en el futuro.

Sin embargo, dado que existen varios parámetros dentro del modelo que son determinados de forma independiente, rara vez se podrá observar esta equivalencia. La tasa de ahorro $s$ esta determinada por las preferencias, n es determinada por cuestiones biológicas, y el ratio capital-producto $v$ esta dado por la tecnología. Normalmente la equivalencia no solo **no** se cumple, sino que divergen.

Por ejemplo si: $$g=\frac{s}{v}>g_w=\frac{s}{v_r}$$

Entonces, los empresarios observaran que $v < v_r$, o sea que el incremento efectivo del stock de capital es menor al necesario. Con lo cual habrá estímulo para realizar inversiones adicionales. Matemáticamente, la tasa de crecimiento efectiva seguirá siendo mayor que la garantizada. Esto provocara una permanente expansión. Si la relación fuese a la inversa, sucedería lo opuesto.

En otras palabras, esta condición de equilibrio vuelve al sistema altamente inestable y es lo que la teoría económica denomina el **"filo de la navaja"**, ya que el equilibrio se encuentra entre una sobre o sub expansión creciente. Si las magnitudes de los parámetros se alejan del centro exacto, esto tendrá consecuencias como por ejemplo un desempleo creciente o una inflación prolongada.

Finalmente, los autores concluyen que en general, no es posible una tasa de crecimiento continuo con pleno empleo. Además, las economías de mercado son inherentemente inestables.

Por supuesto que estas conclusiones han recibido algunas críticas. Solow, por ejemplo, considero que la oposición fundamental entre tasa garantizada y efectiva prescinde de los coeficientes fijos para la producción. Si se abandonara este supuesto, esta noción de filo de la navaja para el balance inestable desaparecería al mismo tiempo. Solow considero, además, que este modelo de Harrod-Domar analiza problemas de largo plazo con herramientas de corto plazo. De aquí que surgen modelos más elaborados.

Así, luego de un breve repaso de este modelo, se interpreta que la idea de dinamización del modelo de Leontief proviene, en principio, del modelo de Harrod-Domar. De aquí que la suposición de coeficientes fijos de capital es esencial para el modelo dinámico.

**4.2 Modelo dinámico de Leontief:** Gran parte de esta revisión fue extraída del libro de Akira Takayama **(1985)**.

Leontief, economista estadounidense nacido en Rusia. Fue autor de un trabajo que lo hizo merecedor de un Nobel en el año 1973, que se enfocó en el análisis de **insumo-producto**. En este sentido, esta matriz de insumo-producto describía el flujo de bienes y servicios entre diferentes sectores de una economía. Ya sea nacional o regional, y buscaba medir la relación entre las industrias dentro de esta economía. Este tipo de técnica fue muy utilizada por grandes empresas y organismos gubernamentales como mecanismo de optimización.

En línea con esta idea, este modelo dinámico que se analiza a continuación es una extensión natural de su modelo estático de insumo-producto. Y como en el caso estático, la interacción de equilibrio general entre las distintas industrias de una economía explícitamente se ha tenido en cuenta. Al igual que el modelo estático, el modelo dinámico también se utiliza ampliamente para determinar la estructura industrial de determinadas economías, con fines de previsión, **planificación**, etc.

Desde el punto de vista teórico, este modelo puede considerarse un caso especial del **modelo de Von Neumann (1937)**, en el que sólo hay un proceso de producción disponible para cada bien (el "supuesto de coeficiente fijo") y no se permite ninguna salida conjunta, excepto que los bienes de capital pueden considerarse como salidas conjuntas en el sentido de que se transfieren de un período a otro.

El supuesto de coeficientes fijos, a pesar de ser de gran utilidad empírica puede resultar muy rígido, y esto trae aparejadas algunas dificultades teóricas para el modelo dinámico. Una de estas dificultades, y tal vez la más importante, es la indeterminación causal. Matemáticamente quiere decir que, **a menos que el vector de producción y el vector de existencias iniciales se encuentren en una determinada recta desde el origen**, puede ocurrir que la producción y las existencias de al menos un bien se vuelvan negativas para un valor t suficientemente grande.

Se han realizado varios intentos para rescatar este modelo dinámico de esta dificultad. Un concepto útil en este sentido resulta ser el de "**estabilidad relativa**", desarrollado por Solow y Samuelson **(1953)**. Es decir, si las matrices de coeficientes A y B satisfacen ciertas condiciones (luego se hará una correspondiente definición de estas matrices), **existe una trayectoria** de en la que todas las producciones (o existencias) crecen al mismo ritmo, de manera que entre la producción (o stock) de la **senda de crecimiento balanceado** y la producción (o stock) real de cada bien, **converge** a una determinada constante positiva, a medida que el tiempo se extiende sin límite, **independientemente de la configuración inicial** de la producción y las existencias. Esto resulta muy importante para el modelo de trabajo realizado.

El estudio de este comportamiento puede expresarse como un sistema de ecuaciones en diferencia de primer orden, lineales y homogéneas de la forma:

$$x_{t+1} = M \cdot x_t$$

Donde M es una matriz de $n \, x \, n$, y $x_t$ (y $x_{t+1}$) es un n-vector.

En el modelo dinámico (**cerrado**) de Leontief, resulta que M se escribe como

$$M = I + B^{-1}(I - A)$$

Una condición necesaria y suficiente para la estabilidad relativa del sistema, fue descubierta por Tsukui **(1961)**. Este afirma que el sistema anterior es relativamente estable, si y sólo si, existe un entero positivo **m** tal que $M^m > 0$. Entonces por iteración se llega a:

$$x_t = M^t \cdot x_0$$

Por lo tanto, para un t suficientemente grande (por ejemplo, m), la producción de cada bien se vuelve positiva **independientemente del punto inicial**, $x_0 \geq 0$.

Lo interesante de este resultado es que, un sistema de ecuaciones en diferencia de la forma $x_{t+1} = M \cdot x_t$ puede aparecer en muchos campos de la economía distintos al sistema de Leontief. Con lo cual, podrían existir infinidad de aplicaciones potenciales. Este es un gran motivo de inspiración para este trabajo, el cual busco tomar parte de este resultado y ponerlo en práctica.

Volviendo al sistema dinámico de Leontief, si se supusiera, por ejemplo, que las matrices de coeficientes A y B son tales que **no** se tiene estabilidad relativa. Entonces se vuelve al problema de la indeterminación causal. En general, no hay nada que garantice la estabilidad relativa del sistema. La respuesta a esta cuestión de la indeterminación causal en estas circunstancias genéricas puede buscarse desde dos direcciones. Una es convertir el modelo dinámico (determinista) de Leontief **en un modelo de planificación**, en cuyo caso el problema de la indeterminación causal **puede evitarse trivialmente** introduciendo explícitamente la **no negatividad** de los vectores de producción y los vectores de stock (para todo t) en las restricciones. La parte no trivial de este procedimiento de conversión es **cambiar** las **igualdades** del sistema de Leontief por **desigualdades**.

El procedimiento para convertir el modelo determinista de Leontief en un modelo de planificación para evitar el problema de la indeterminación causal, fue desarrollado por Solow **(1959)**. Dado que las matrices de coeficientes A y B se fijan de manera que el sistema es lineal, Solow obtuvo un modelo de **programación lineal**. Considerando entonces el problema dual de este modelo de programación lineal e interpretando las variables duales como variables de "precio", obtuvo un resultado notable: la implicación del precio del sistema de output del modelo dinámico de Leontief.

Por otro lado, si se preserva la linealidad en el sentido de la homogeneidad lineal de los procesos de producción, todavía se puede evitar el problema de la indeterminación causal introduciendo explícitamente algún tipo de "no linealidad" en el sistema. Según Akira Takayama **(1985)** se pueden distinguir 3 tipos de “no linealidad” para evitar la indeterminación causal.

**(i)** Permitir sustitución de factores en los procesos de producción. En este caso, las $a^{(ij)}, b^{(ij)}$ en las matrices A y B **ya no son fijos**, sino que son **funciones de los precios**.

Además, se puede introducir la mano de obra en este mecanismo de sustitución.

**(ii)** Permitir la sustitución de la demanda (del consumidor). En el modelo dinámico habitual de Leontief el vector de demanda final $c_t$ está dado exógenamente; pero se puede permitir que dependa de los precios.

**(iii)** Introducir un "piso" y un "techo", tal como Hicks **(1950)** los introdujo en el modelo de ciclo económico de Samuelson. Como observó Goodwin **(1951)**, esto equivale esencialmente a introducir la no linealidad en el sistema.

Por ejemplo, si el stock de un determinado bien se desacumula en un periodo(s) determinado(s) (muy cercano a cero) entonces la escasez de este bien provocaría, en general, un aumento de su productividad marginal y/o un aumento de su utilidad marginal. Esto aumentaría la demanda del bien, aumentando así su precio. Esto, a su vez, provocaría un aumento de la oferta, lo que evitaría que el stock del bien se desacumulara a cero.

Por otro lado, el hecho de que el trabajo pueda introducirse en el mecanismo de sustitución del productor en **(i)** tiene otra implicación importante en el sentido de que evitará otra dificultad mayor en el modelo dinámico de Leontief con coeficientes fijos. A continuación, se discute esta dificultad. En condiciones de pleno empleo del capital, el vector de producción $x_t$ puede seguir la ley del movimiento descrita por un sistema de ecuaciones en diferencia como:

$$x_{t+1} = M \cdot x_t + d_t$$

Donde $d_t$ se da exógenamente por la demanda final en el modelo abierto en el que el trabajo se introduce de forma explicita. Mientras exista una relación fija entre el insumo de trabajo y la producción de cada de cada bien, el movimiento de $x_t$ determinará de forma única la necesidad de mano de obra en la economía.

Por otro lado, sea $L_t$ suponiendo que este no se corresponde con la oferta de empleo. Entonces no existe ningún mecanismo en el sistema dinámico habitual para eliminar la diferencia con la oferta de trabajo.

Por ejemplo, suponiendo que la oferta de trabajo está dada exógenamente por la población y crece de forma proporcional:

$$L_t = L_0 \cdot (1+n)^t$$

Además, suponiendo que la producción queda determinada por:

$$x_{t+1} = M \cdot x_t + d_t$$

Viene dada por: $x_0 \cdot (1+\mu)^t + K$ , donde K es una constante

Entonces se tiene un desempleo creciente de la mano de obra sí $n > \mu$ . Si por el contrario se tiene que $n < \mu$ , entonces este sistema productivo no tendría sentido para tal crecimiento de la producción es imposible debido a la restricción laboral. Esta dificultad puede evitarse introduciendo la mano de obra en el mecanismo de sustitución del productor. En otras palabras, si la mano de obra crece más rápido de lo que se necesita, el precio de la mano de obra bajará y fomentará el uso de la mano de obra en la producción frente a otros factores. Esto, a su vez, aumentará la necesidad de mano de obra. En otras palabras, los coeficientes de trabajo (las cantidades de trabajo necesarias para producir una unidad de cada bien) no son constantes fijas sino funciones de los precios.

Morishima **(1958)** introdujo la no linealidad del tipo **(i)**. Sin embargo, parece que se equivocó por su deseo de obtener el teorema de sustitución para el sistema dinámico de Leontief. Se preocupó por reducir la no linealidad a la linealidad argumentando que sólo se elegirá un conjunto de valores de los $a^{(ij)}, b^{(ij)}$

independientemente del valor de la demanda final, más que con el problema de la indeterminación causal per se.

A pesar de su dificultad para establecer el teorema de sustitución para el caso dinámico, su intento de construir el modelo dinámico de Leontief con un reconocimiento explícito de la sustitución del productor y de demostrar la existencia y la unicidad de los valores de equilibrio de las variables fue muy importante. Además, su modelo tiene una característica interesante, ya que su tratamiento de los precios y el supuesto de Solow sobre los precios representan dos supuestos polares en el tratamiento de los precios en el modelo dinámico de Leontief. Después de todo, el problema de encontrar un sistema de precios adecuado para el modelo dinámico de Leontief no es fácil.

*"El lado de la valoración del precio del sistema dinámico de Leontief ha sido bastante descuidada. Hasta donde yo sé, una historia completa de la literatura sobre este tema puede darse en un párrafo"* **(Solow, 1959)**

Esto se debe a la razón obvia de que en el modelo de Leontief no hay de la sustitución del consumidor y del productor, en la que los precios pueden desempeñar un papel fundamental. Como ya se ha comentado, la sustitución del consumidor se descuida debido al tratamiento exógeno de la demanda final, y la sustitución del productor no se tiene en cuenta debido a los coeficientes fijos. Sin embargo, no es correcto decir que no hay formación de precios en el sistema dinámico de Leontief. Se puede seguir la implicación lógica del modelo tal y como está suponiendo que cada mercancía es evaluada por determinados precios de forma sistemática y preguntando cuáles son las implicaciones de dicha evaluación. En la literatura, dos ejemplos de sistema de precios en el marco de la competencia son bien conocidos: el sistema de Solow y el sistema de Morishima.

Anteriormente se han mencionado las bondades del sistema de coeficientes fijos o de linealidad estricta para fines empíricos. Aunque también se mencionó que presentan algunas dificultades para el plano teórico debido a su rigidez. Sin embargo, aunque puede resultar de gran utilidad, es a pesar de todo, una **aproximación lineal de un sistema que no lo es**. La dificultad que plantea la indeterminación causal parece ser la de estirar las propiedades que pueden mantenerse sólo localmente (es decir, en la vecindad en la que la aproximación lineal es una buena aproximación) a un dominio global que es inevitable a medida que $t \to \infty$. Dicho todo esto, se introduce el modelo dinámico de Leontief.

### 4.3 The ouput system

Sea $x_t$ un n-vector cuyo i-esimo elemento es $x_t^{(i)}$, la producción del i-esimo bien en el periodo t. Sea $A = \left[a^{(ij)}\right]$ una matriz de n x n, en la que $a^{(ij)}$ denota la entrada actual del i-ésimo bien **utilizado** por unidad del j-ésimo bien. Además, sea $B = \left[b^{(ij)}\right]$ también una matriz de n x n, donde $b^{(ij)}$ indica la cantidad del i-ésimo bien **invertido** en la j-ésima industria para aumentar la producción de esa industria en una unidad. Y sea $\overline{c}_t^{(i)}$ la demanda final (como la demanda de consumo) del i-ésimo bien en el período t. Entonces, la **demanda total** del i-ésimo bien en el período t es:

$$\sum_{j=1}^{n} a^{(ij)} x_t^{(j)} + \sum_{j=1}^{n} b^{(ij)} \left[ x_{t+1}^{(j)} - x_t^{(j)} \right] + \overline{c}_t^{(i)} \qquad \text{(a.1)}$$

El segundo término de esta expresión puede entenderse suponiendo que la producción de cada bien requiere un stock de bienes (como el "capital") así como insumos corrientes (como las "materias primas"). En otras palabras, si se supone que, en la producción de una unidad del j-esimo bien, son necesarias $b^{(ij)}$ unidades del stock j-esimo bien como un bien de capital. Sea $K_t^{(ij)}$ la cantidad de existencias del i-ésimo bien necesario como capital en la j-esima industria en el periodo t. Entonces, se tiene:

$$b^{(ij)} x_t^{(j)} = K_t^{(ij)} \qquad \text{(a.2)}$$

Sea $K_t^{(i)}$ el stock total del i-ésimo bien requerido como bien de capital en la economía en el período t, es decir: $K_t^{(i)} \equiv \sum_{j=1}^{n} K_t^{(ij)}$ . Por (a.2) entonces se tiene que:

$$K_t^{(i)} = \sum_{j=1}^{n} b^{(ij)} x_t^{(j)} \qquad \text{(a.3)}$$

Si se supone que el capital es **libremente transferible** de una industria a otra, y además que también el **pleno empleo del capital**, de modo que $K_t^{(i)}$ en (a.3) también denota la oferta del i-ésimo capital así como su demanda $(i = 1,2, \dots, n)$.

Entonces:

$$I_t^{(i)} = \Delta K_t^{(i)} \equiv K_{t+1}^{(i)} - K_t^{(i)} = \sum_{j=1}^{n} b^{(ij)} \left[ x_{t+1}^{(j)} - x_t^{(j)} \right] \qquad \text{(a.4)}$$

Donde $I_t^{(i)}$ es la cantidad del i-ésimo bien demandado (y suministrado) con fines de "inversión".

La expresión **(a.1)** puede interpretarse como:

(demanda como insumo actual) + (demanda de inversión) + (demanda final) del i-ésimo bien.

Dado que $x_t^{(i)}$ denota la producción del i-ésimo bien en el período t, la relación básica de equilibrio oferta = demanda para el i-ésimo bien puede escribirse como:

$$x_t^{(i)} = \sum_{j=1}^{n} a^{(ij)} x_t^{(j)} + \sum_{j=1}^{n} b^{(ij)} \left[ x_{t+1}^{(j)} - x_t^{(j)} \right] + \overline{c}_t^{(i)} \qquad \text{(a.5)}$$

O en forma de matrices:

$$x_t = A \cdot x_t + B \cdot \left[ x_{t+1} - x_t \right] + \bar{c}_t \qquad \text{(a.6)}$$

Donde $\bar{c}_t$ es un n-vector cuyo i-ésimo elemento es $\bar{c}_t^{(i)}$. Para simplificar un poco más la notación se puede reescribir **(a.6)** teniendo en cuenta que:

$$K_t = B \cdot x_t$$

Y que
$$\Delta K_t = K_{t+1} - K_t$$

Así entonces:
$$x_t = A \cdot x_t + \Delta K_t + \bar{c}_t \qquad \text{(a.7)}$$

En este caso se supone la libre transferencia y el pleno empleo del capital. La ecuación (a.5) o (a.6) [ o (a.7)] denota la **ecuación básica** de producción del sistema dinámico de Leontief. La matriz **A** se denomina matriz de coeficientes de insumo actual y la matriz **B** se denomina matriz de coeficientes de capital.

El objetivo ahora será estudiar el comportamiento de $x_t$ a lo largo del tiempo, tal como se describe en la ecuación (a.6).

**(S.1)** $a^{(ij)} \geq 0$ y $b^{(ij)} \geq 0$ para todo $i, j = 1,2,\ldots,n$, y los $a^{(ij)}$'s y los $b^{(ij)}$'s son todas constantes a lo largo del tiempo. La constancia de $a^{(ij)}, b^{(ij)}$ significa que no hay progreso tecnológico.

Como se ha señalado anteriormente, el sistema anterior del modelo dinámico de Leontief puede considerarse un caso especial del modelo de crecimiento de von Neumann en el que sólo hay proceso de producción en cada industria ("coeficientes fijos") y la producción conjunta sólo se permite en el sentido de que cada proceso de producción utiliza existencias de bienes que se transfieren de un periodo a otro.

Para facilitar el análisis posterior, se impone el siguiente supuesto:

**(S.2)** La matriz B es no singular

Entonces se puede escribir **(a.6)** como:

$$x_{t+1} = \left[ I + B^{-1}(I - A) \right] \cdot x_t - B^{-1}\bar{c}_t \qquad \text{(a.8)}$$

Donde $I$ es la matriz identidad con n dimensiones

Ahora se limitará la atención al sistema dinámico **cerrado** de Leontief. Con lo cual $\bar{c}_t = 0 \; \forall \; t$. Asi, se reescribe (a.8) como:

$$x_{t+1} = \left[ I + B^{-1}(I - A) \right] \cdot x_t \qquad \text{(a.9)}$$

O, lo que es lo mismo que:

$$x_{t+1} = M \cdot x_t, \quad \text{donde} \quad M \equiv \left[ I + B^{-1}(I - A) \right] \qquad \text{(a.9')}$$

Por lo tanto, se trata de un sistema de n ecuaciones en diferencias de primer orden, lineales y homogéneas con coeficientes constantes. Si ahora se supone que $\lambda_i$ es un valor propio de M; entonces se sabe que la siguiente es una solución particular:

$$\tilde{x}_t = \lambda_i{}^t x^{(i)} \tag{a.10}$$

Donde $x^{(i)}$ es vector propio asociado con $\lambda_i$. Que ésta es una solución de (a.9) puede comprobarse fácilmente sustituyéndola en (a.9) y observando que (a.9) se reduce a una identidad. Si todos los valores propios de M son distintos, entonces las n soluciones particulares en la forma de (a.10) $(i = 1,2,\dots,n)$ son linealmente independientes, y **la solución general** de (a.9) se puede escribir como:

$$\hat{x}_t = h_1\lambda_1{}^t x^{(1)} + \cdots + h_n\lambda_n{}^t x^{(n)} \tag{a.11}$$

Donde $h_1, h_2, \dots, h_n$ están determinados por las n condiciones iniciales (de contorno). El hecho de que ésta sea una solución de (a.9) puede comprobarse fácilmente observando que (a.11) reduce (a.9) a una identidad.

En general, las $\lambda_i$ 's son números complejos y las $x^{(i)}$ 's pueden contener elementos negativos, por lo que la solución (a.10) puede no tener ningún significado económico. Sin embargo, **si se supone que uno de los valores propios** (por ejemplo, $\lambda_1$) **es un número positivo** (real), **con un vector propio positivo asociado** a él, ejemplo $x^{(1)} > 0$. Entonces una solución:

$$x_t^* = \lambda_1{}^t x^{(1)} \tag{a.12}$$

En **este caso tiene sentido económico**, porque quiere decir que si el vector de producción inicial, $x_0$, de la economía es $x^{(1)}$ (o su múltiplo positivo, por ejemplo, $h_1 x^{(1)}$), entonces la economía es capaz de obtener "crecimiento balanceado" (a la tasa de $\lambda_1$) para $\lambda_1 > 1$, o "contracción balanceada" para $0 < \lambda_1 < 1$. Entonces a la senda de (a.12) se la denomina simplemente como **senda de crecimiento balanceado** o **solución de crecimiento balanceado**. Esta es una conclusión interesante, ya que si el vector de salida inicial $x_0$ es $x^{(1)}$ o su múltiplo constante (positivo), entonces, en la economía en la que se cumple (a.9) , la producción de cada bien crece (o decae) al mismo ritmo $\lambda_1$. Este es un resultado fundamental para el modelo realizado.

Una pregunta natural que se desprende de esta consideración es: ¿**Cuáles son las condiciones que garantizan la existencia** de un valor propio positivo $\lambda_1$ y un vector propio positivo $x^{(1)}$ asociado a él?. Una idea inmediata al respecto es **considerar el caso en que M es una matriz no negativa**. Porque si M es una matriz no negativa indescomponible, entonces, debido al **teorema de Frobenius** (véase **teorema n°1 apéndice A**), existe un valor propio positivo (llamado **raíz de Frobenius**) y un vector propio positivo asociado a ella. Es decir, simplemente tomando la raíz de Frobenius como $\lambda_1$ y el vector propio asociado como $x^{(1)}$, entonces se tiene una **solución de crecimiento balanceado**, (a.12).

Sin embargo, existe una dificultad básica, a saber, la cuestión de cómo se puede **garantizar** que $M \equiv \left[I + B^{-1}(I - A)\right]$ sea una matriz no negativa. En general, $\mathrm{M}$ no será no negativa.

Sin embargo, el hecho de que $\mathrm{M}$ no sea una matriz no negativa puede no excluir la posibilidad de que el sistema de ecuaciones en diferencia, (a.9), contenga una solución de crecimiento balanceado. Por lo tanto, se desea encontrar un conjunto de supuestos plausibles bajo los cuales existe una solución de crecimiento balanceado de (a.9). Para esto, si se supone primero que la matriz $\left[I - A\right]$ tiene una **diagonal dominante**, es decir:

**(S.3)** Entonces $\exists\, x \geq 0, x \in \mathbb{R}^n$ tal que $(I - A) \cdot x > 0$

Entonces, utilizando otro de los teoremas de Frobenius (**teorema n°2** en **apéndice A**), se puede concluir que $\left[I - A\right]$ es no singular, y que $\left[I - A\right]^{-1} \geq 0$. Como $B \geq 0$ por **(S.1)**, $\left[I - A\right]^{-1} \cdot B$ también es no negativo. Si, además, $\mathrm{A}$ es indescomponible, $\left[I - A\right]^{-1}$ > 0 por lo que $\left[I - A\right]^{-1} \cdot B > 0$ en vista de la no singularidad de B.

Pero A puede no ser indescomponible, por lo que simplemente se supone que

**(S.4)** $\left[I - A\right]^{-1} \cdot B$ es indescomponible

Entonces, debido al **teorema n°1** de Frobenius, existe un valor propio máximo $v > 0$ con el que se asocia un vector propio positivo $\overline{x} > 0$. En otras palabras:

$$\left[I - A\right]^{-1} \cdot \overline{x} = v\overline{x} \qquad \text{(a.13)}$$

Donde $v > 0 \wedge \overline{x} > 0$

Entonces, $\rho \equiv 1/v$ es un valor propio de $B^{-1} \cdot (I - A)$ y su vector propio asociado es $\overline{x}$, ya que $B^{-1}(I - A) \cdot \overline{x} = (1/v)\overline{x}$ por (a.13). Por lo tanto:

$$(1 + \rho) \cdot \overline{x} = \left[I + B^{-1}(I - A)\right] \cdot \overline{x} = M \cdot \overline{x} \qquad \text{(a.14)}$$

Como $1 + \rho > 0 \wedge \overline{x} > 0$. Esto resulta interesante, porque se obtiene el resultado deseado. A saber, un valor propio positivo de M y un vector propio positivo asociado a él. Así, se establece que si $\lambda \equiv 1 + \rho \wedge x^1 \equiv \overline{x}$, la economía es capaz de un crecimiento balanceado en la forma de (a.12), **incluso** si $\mathrm{M}$ no es no negativo. Es decir:

$$x_t^* = (1 + \rho)^t \overline{x} \qquad \text{(a.15)}$$

Lo que interesa de aquí en adelante es el carácter de **largo plazo** del movimiento de $\hat{x}_t$, la solución de (a.9), cuando se parte de un vector inicial dado arbitrariamente $x_0$ en lugar de uno particular como $\overline{x}$ (o $x^{(1)}$). Por esto, resulta importante el concepto de estabilidad relativa que se desarrollara a continuación.

**Estabilidad relativa**: Sea $x_{t+1} = M \cdot x_t$ un sistema de ecuaciones en diferencia donde M es una matriz constante n x n. Si se supone que $x_t^* = \lambda^t \overline{x} > 0$, es una **solución particular** de este sistema de ecuaciones en diferencia. Sea $\hat{x}_t$ una solución de este sistema a partir de un vector inicial arbitrario $\hat{x}_0 \geq 0$. Entonces

la solución de crecimiento balanceado $x_t^*$ se dice que es relativamente estable si:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\hat{x}_t^{(i)}}{x_t^{*(i)}} = \sigma \qquad \text{(a.16)}$$

Existe tal que $0 < \sigma < \infty$, $\sigma$ es independiente de $i$, donde $i$ representa el i-esimo componente.

<u>**OBSERVACION 1**</u>: El concepto de estabilidad relativa es realmente independiente de si el movimiento de $x_t$ se describe mediante un sistema de ecuaciones lineales en diferencias como (a.9). Esencialmente, si $\hat{x}_t$ se comporta según una determinada ley de movimiento (que puede ser cualquiera) partiendo del valor inicial $\hat{x}_0$, y si existe una trayectoria de referencia $x_t^*$ (por ejemplo, $x_t^* = \lambda^t \overline{x}$), que es positivo para todo t, entonces la definición como la descrita por (a.16) se mantiene.

<u>**OBSERVACION 2**</u>: Una de las características cruciales del concepto de estabilidad relativa es que $\hat{x}_t$ puede partir de **cualquier punto inicial** arbitrario. Es decir, independientemente del valor inicial $\hat{x}_0$, la relación (a.16) se mantiene si $x_t^*$ es relativamente estable. Por ejemplo, si se supone que, $\hat{x}_t$ y $\hat{x}_{0_t}$ son dos soluciones que parten de $\hat{x}_0$ y $\hat{x}_{0_0}$, respectivamente, tales que $\hat{x}_t > 0 \forall t$. Entonces se observa que $\hat{x}_{0_t}^{(i)} / \hat{x}_t^{(i)} = \left[\hat{x}_{0_t}^{(i)} / x_t^{*(i)}\right] / \left[\hat{x}_t^{(i)} / x_t^{*(i)}\right]$, se puede concluir que si existe una senda de crecimiento balanceado $x_t^* > 0$ que es relativamente estable, entonces $\lim_{t\to\infty}\left[\hat{x}_{0_t}^{(i)} / \hat{x}_t^{(i)}\right]$ **converge** a una constante que es independiente de $i$.

Si la configuración relativa de las producciones iniciales (o del stock inicial de bienes) no coincide con la de cualquier trayectoria de crecimiento balanceado posible de la economía, entonces la trayectoria de crecimiento puede llegar a una situación en la que la producción (y el stock) de al menos un bien sea negativo. Si esto ocurre, entonces se dice que se tiene **indeterminación causal**.

Es evidente que esta posibilidad de indeterminación causal socava seriamente el modelo dinámico de Leontief. Obsérvese también, que si la economía posee una **senda de crecimiento balanceado que es relativamente estable**, entonces **no** hay indeterminación causal en dicha economía. Este hecho es sumamente importante. En la **Figura 2** se hace una ilustración del concepto de estabilidad relativa. En este sentido, se puede observar cómo $\hat{x}_t$ **se aproxima asintóticamente** a la trayectoria de crecimiento balanceado.

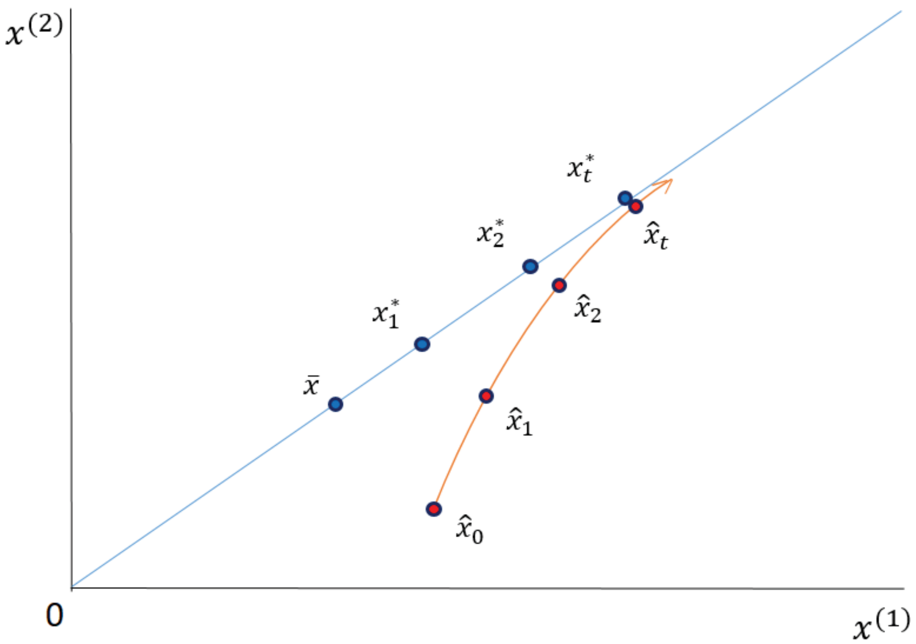


Figura 2 – Ilustración sobre estabilidad relativa -

La **estabilidad relativa** resulta un factor importante **para garantizar una senda de crecimiento balanceado**, y así evitar la indeterminación causal. Como se ha visto anteriormente, la indeterminación causal puede generar grandes problemas en el modelo dinámico de Leontief. Así, el fenómeno de la indeterminación causal genero cierto planteo sobre la siguiente cuestión:

¿Bajo qué condiciones se puede garantizar la existencia de vectores de producción y existencias no negativos, $x_t \wedge K_t \forall t$ , que satisfagan un sistema de ecuaciones en diferencia como (a.9)?

Esta pregunta, en cierto sentido, se asemeja al problema de **Walras-Wald (1954)** de la existencia de un equilibrio competitivo como solución de un sistema de ecuaciones simultáneas. Desde este punto de vista, una forma de resolver este problema puede resultar de **permitir desigualdades** en el sistema.

Un breve resumen de esta técnica que también es otra alternativa de planificación. Solow **(1959)** investigo sobre esto y planteo el siguiente sistema en lugar de (a.7):

$$x_t = A \cdot x_t + \Delta K_t + \overline{c}_t$$

$$K_t \geq B \cdot x_t \text{, con } x_t, K_t \geq 0$$

Lo importante de esto es que las desigualdades se introducen como, $K_t \geq B \cdot x_t$. Esto, por supuesto, significa que se permite la posibilidad de que la producción **no** utilice toda la capacidad disponible; es decir, puede existir un exceso de capacidad. La introducción de estas desigualdades relaja la "estrechez" del sistema de igualdad original como (a.7) y (a.9). Sin embargo, ya no se puede definir una trayectoria de output única $x_t$ (y una trayectoria de existencias $K_t$) como solución de un sistema dado de ecuaciones en diferencias como (a.9). En cambio, en este modelo de inecuaciones las relaciones solo definen una **trayectoria "factible"** de un vector de output y un vector de existencias. Es evidente que pueden existir infinidad de $x_t$ y $K_t$ que satisfagan estas relaciones. Incluso si las condiciones iniciales están dadas de manera única.

En resumen, el trabajo de Solow propone resolver esta cuestión a través de un mecanismo de optimización. En otras palabras, como un problema de **programación lineal**. Bajo este modelo surgen variables duales que juegan el papel de los precios en el mecanismo competitivo. Los valores de las variables duales pueden calcularse explícitamente resolviendo el problema de programación lineal dual. En resumen, el problema de la indeterminación causal **puede evitarse simplemente convirtiendo las igualdades en desigualdades**, es decir, permitiendo el exceso de capacidad del capital junto con la restricción de no negatividad.

Es necesario aclarar nuevamente que este es un **modelo de planificación** y no un modelo descriptivo de una economía. Aunque puede interpretarse como una "**trayectoria óptima**" generada por un mecanismo "competitivo", no describe el mecanismo ni el equilibrio de una economía dinámica competitiva.

Sin embargo, si el estudio se basa en el tratamiento de un equilibrio competitivo (estático) en términos de programación lineal (con el teorema de la dualidad) de Kuhn **(1956)**, se podría diseñar un modelo para una economía dinámica competitiva, utilizando el modelo de planificación anterior, y demostrar varias propiedades del modelo, como la existencia, etc. En otras palabras, se podría considerar el modelo de planificación anterior como **parte** de un modelo descriptivo.

Por otro lado, existe otra vía posible de desarrollo en el modelo de planificación anterior, y es la de abandonar el supuesto de los coeficientes fijos y permitir varios procesos de producción para la producción de uno o más bienes, pero conservando el carácter básico de planificación del modelo. Una cuestión natural que se plantea entonces es la de las caracterizaciones de la "trayectoria óptima". Algunos autores que se han encargado de trabajos de investigación en este campo como por ejemplo Gale **(1967)**. Sin embargo, no se ahondará en este campo ya que excede el espíritu de este trabajo.

En resumen, se han visto los orígenes del modelo, y gran parte de las bondades y consecuencias de las técnicas utilizadas en el modelado dinámico. Como se ha visto, además, en capítulos anteriores, surge la necesidad de pensar en un modelo macro-dinámico, en lugar de uno micro-estático. Utilizar entonces un sistema dinámico y en este caso discreto, más específicamente de ecuaciones en diferencia, despierta gran inspiración para estudiar los pros y contras del comercio internacional y el crecimiento balanceado. La idea principal es, tomando un poco el debate de capítulos anteriores sobre los beneficios del comercio internacional, entender la economía internacional como un sistema que de sinergia al crecimiento en simultaneo y se puedan obtener resultados óptimos para economías estratégicas. Y en este sentido, se realizó un estudio dinámico del comportamiento de estas economías que pueden resultar estratégicas en términos de sociedad comercial. En resumen, el contenido de estos capítulos son motivo de gran parte de la inspiración del trabajo realizado. A continuación, antes de desarrollar el modelo, una sección más técnica sobre las herramientas matemáticas necesarias. A saber, se hace una introducción a sistemas dinámicos discretos, especialmente autónomos, y su análisis a lo largo del tiempo.

## 5. Sistemas dinámicos

Principalmente, los sistemas dinámicos pueden dividirse en dos grandes clases, continuos y discretos. La principal diferencia radica en como varia el tiempo en cada uno de ellos, donde literalmente uno tiene una variación de tiempo continua mientras que la otra clase da saltos discretos entre periodo y periodo. En el caso de los sistemas continuos, estos se expresan con lo que se denominan ecuaciones diferenciales. Y en el caso discreto, se utilizan ecuaciones en diferencia. Como ya se sospechará debido a la reiterada mención en los anteriores apartados, el enfoque del trabajo se hizo con este último tipo, o sea, el caso de sistemas dinámicos discretos.

A pesar de que existan ciertas diferencias conceptuales que distinguen un modelo dinámico continuo de uno discreto, existe una estrecha vinculación entre ambos. En particular, muchos aspectos del modelo continuo pueden ser estudiados a través de una versión discreta que se suele denominar “mapa de Poincaré” **(1892)**. Si se representa una evolución temporal de un sistema de n grados de libertad en un espacio de fases con n dimensiones se puede hallar una trayectoria. Además, también es posible hallar una hipersuperficie que contiene n-1dimensiones y que se corta varias veces por la trayectoria. Este conjunto de puntos de intersección se suele denominar orbita. De aquí surge que la relación iterativa entre estos puntos constituye este "mapa" que da lugar al sistema dinámico discreto.

Por otra parte, también es importante introducir una sub-categorización dentro de cada caso, que luego se ahondara más en profundidad en cada uno de ellos. A saber, estos sistemas dinámicos se pueden clasificar, además, como **autónomos y no autónomos** (esto también aplica en el caso continuo). En otras palabras, lo que diferencia esta clasificación es principalmente si la variable tiempo se expresa de manera explícita en la ecuación o no. Esta diferencia por tan sutil que parezca, implica que el tratamiento del modelo sea muy diferente al caso autónomo.

Entonces, un sistema **autónomo** se define en un campo vectorial que no depende explícitamente del tiempo. Por lo tanto, se puede considerar un instante inicial $t_0 = 0$ de manera arbitraría. Además, sus coeficientes son constantes. En el caso **no autónomo**, por el contrario, el campo vectorial si depende del tiempo. Y en este caso a diferencia del sistema autónomo, el instante inicial no puede determinarse de manera arbitraria como cero. Y, además, en este caso los coeficientes no son constantes, sino que dependen precisamente del tiempo. Con lo cual, su solución no es tarea sencilla.

### 5.1 Sistemas dinámicos discretos

Como ya se ha mencionado, los sistemas dinámicos discretos están definidos por un mapa discreto $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, y su evolución se rige por ecuaciones de recurrencia que se expresan de forma vectorial. Así, si se aplica un mapa de manera iterativa a partir de una condición inicial, se obtiene esta secuencia de puntos en el espacio $\mathbb{R}^n$ que se mencionaba anteriormente. Cuando se habla de resolver un problema dinámico, lo que se pretende es **encontrar una trayectoria de tiempo** a partir de un patrón dado en el cambio de una variable con el tiempo (en este caso discreto), la principal diferencia en este caso es que, este patrón de cambio a diferencia del caso continuo representado por derivadas del tipo $dy/dt$, es representado por un cociente en diferencias como $\Delta y / \Delta t$. Sin embargo, en este caso $t$ solo puede adoptar valores enteros, por lo que $\Delta t = 1$. Así, el coeficiente puede simplificarse sencillamente como, $\Delta y$, esto es lo que se denomina como "primera diferencia". Por ejemplo, puede escribirse la siguiente expresión como una primera diferencia de y: $\Delta y_t \equiv y_{t+1} - y_t$. Como se puede observar, esto es lo que da origen a lo que se denominan ecuaciones en diferencia.

Las ecuaciones en diferencia pueden resultar de diferentes características, las hay del tipo homogéneas y no homogéneas, como también lineales o no lineales, o autónomas o no autónomas. Además, pueden tener también características de orden, como ser de primer o segundo orden; o de orden n o superior.

Por ejemplo, una ecuación **lineal homogénea de primer orden** es aquella que puede escribirse como:

$$x_{t+1} = a \cdot x_t \Rightarrow x_{t+1} - a \cdot x_t = 0 \text{, se asume además que } a \neq 0$$

Por otra parte, el caso **no homogéneo** podría ser:

$$x_{t+1} = a \cdot x_t + g_{(t)} \text{,}$$

donde la primera diferencia no es igual a cero. Y donde se obtendrá también, además de la solución homogénea, una solución particular.

No se hará un desarrollo exhaustivo sobre ecuaciones en diferencia, para mayor profundización se recomienda recurrir a libros de economía matemática introductorios como por ejemplo Alpha Chiang **(2006)**, u otros más avanzados como Simon y Blume **(2007)** o Akira Takayama **(1985)**.

Finalmente, se puede resumir **conceptualmente** que lo que se conoce como sistema dinámico discreto es, en definitiva, un sistema que está compuesto por ecuaciones de esta clase, o sea, en diferencias (con cualquier tipo de características de las mencionadas anteriormente).

Los sistemas dinámicos discretos han sido una de las áreas de mayor importancia para el estudio de comportamientos. Sobre todo, de poblaciones, como por ejemplo, de determinadas regiones o a nivel global, en grupos o en determinados periodos de tiempo. Además, existen infinidad de factores que intervienen en este comportamiento, y que resultan de utilidad para comprender ciertos patrones y/o poder predecir algún destino ulterior. Algunos ejemplos de estos factores: geográficos, ambientales, sociales, de interacción o competencia con otros grupos, de disponibilidad de recursos, del uso racional de estos, de políticas gubernamentales al respecto, o del grado de desarrollo de la tecnología.

**Matemáticamente**:

Una transformación continua $f : X \rightarrow X$ en un espacio métrico X define un sistema dinámico discreto cuando considera sus iteraciones $f^2 = f \circ f$ , $f^3 = f \circ f \circ f$ . El objetivo entonces es obtener una descripción del comportamiento de estas iteraciones $f^k$ cuando $k \rightarrow \infty$.

Por ejemplo, un sistema dinámico discreto **autónomo** (en este caso), y de primer orden como $X_{t+1} = f_{(x_t)}$ con un valor inicial $X_0$, se puede determinar el valor de $X_t$ mediante este proceso de iteración en donde $f^t$ representa la composición de $t$ veces la función $f$ consigo misma:

$$X_1 = f_{(X_0)},$$
$$X_2 = f_{(X_1)} = f_{(f_{(X_0)})} = f^2_{(X_0)}$$
$$\vdots$$
$$X_t = f_{(f_{(\cdots f_{(x_0)}\cdots)})} = f^t_{(X_0)}$$

Se puede observar que este proceso de iteración hacia atrás se remonta al valor inicial $X_0$. Como se ha mencionado, interesa fundamentalmente poder inferir cierto patrón de comportamiento, esto puede resultar útil para poder predecir que puede suceder en el largo plazo. Con lo cual es de interés saber que pasa en el límite:

$$\lim_{t \to \infty} f^t_{(X_0)}$$

Para fines ilustrativos, se hará una demostración de un caso homogéneo del tipo $x_{t+1} = a \cdot x_t$, con una condición inicial $x_0$. Iterando se tiene entonces:

$$x_1 = a \cdot x_0$$
$$x_2 = a \cdot x_1 = a^2 \cdot x_0$$
$$\vdots$$
$$x_t = a^t \cdot x_0$$

Por supuesto este es un ejemplo sencillo, cuando se habla de sistemas con mayor complejidad compuesto por más ecuaciones en diferencia se tiene que:

$$x_{t+1} = A \cdot x_t$$

Donde $x_t$ es un vector: $x_t = \begin{bmatrix} x_t^{(1)} \\ x_t^{(2)} \\ \vdots \\ x_t^{(n)} \end{bmatrix}$ y A es una matriz cuadrada real de coeficientes.

En resumen, entonces, para obtener un sistema dinámico discreto se necesitan dos elementos. Por un lado, **un espacio métrico $\mathbb{X}$**, donde este conjunto tiene la forma en la que se pueden medir las distancias. Este conjunto puede pertenecer, por ejemplo, a los números reales $\mathbb{R}$, a un plano $\mathbb{R}^2$, al conjunto de números complejos $\mathbb{C}$, o por ejemplo un intervalo cerrado [0,1].

El otro elemento necesario es **una función continua** de este espacio métrico X en sí mismo, $f : X \to X$.

Con estos dos elementos se puede definir entonces que, para cada $x \in X$, se tiene una sucesión de puntos conocida como la "*orbita de $x$ bajo $f$*".

La notación habitual para esta orbita es: $o(x, f) = \{x, f_{(x)}, f^2_{(x)}, f^3_{(x)}, \ldots\}$

Como se ha mencionado, $f^t$ es la composición de $t$ veces consigo misma que se denomina iteración de $f: X \to X$. Se define así entonces, $f^0: X \to X$ como la función **identidad** de X. Lo que se puede interpretar de esta sucesión $o(x, f)$ es que, para el tiempo $t = 0$ la posición del objeto es $x_t$, en $t = 1$ el objeto sufre un cambio de posición a $f_{(x)}$, en $t = 2$ se tiene $f_{(f_{(x)})} = f^2_{(x)}$, y así sucesivamente. En la **Figura 3** se ilustra un ejemplo de una órbita de $x_0$ en una recta real.

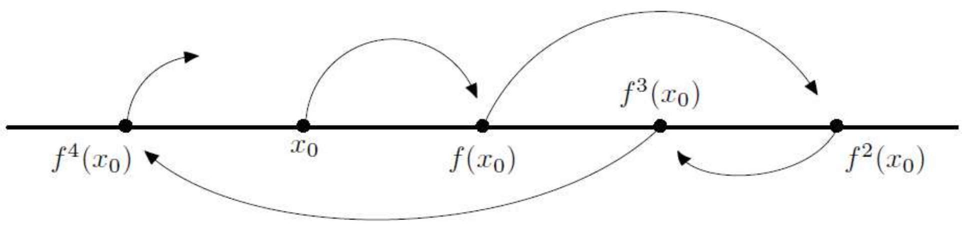


Figura 3 – Orbita de $x_0$ en una recta real –

Fuente: Davalos, Lango (2014)

Esta orbita $o(x, f)$, que surge de X y $f$, da lugar a un modelo matemático que es el sistema dinámico discreto.

### 5.2 Puntos fijos

Una vez definido el concepto de sistema dinámico discreto, se puede hacer una definición de un punto fijo. Un punto fijo en un sistema dinámico representa alguna **solución de este sistema**.

Matemáticamente:

Sea $f: X \to X$. Se dice que $x_0 \in X$ es un punto fijo de $f$ sí $f_{(x_0)} = x_0$. Esta orbita es una sucesión muy sencilla:

$$o(x_0, f) = \{x_0, x_0, ...\}$$

Como para cada $t$ se tiene que $f^t_{(x_0)} = x_0$, con lo cual $o(x, f) \to x_0$. O sea, en resumidas cuentas:

$$\lim_{t \to \infty} f^t_{(x_0)} = x_0$$

Entonces un punto $x^*$ que pertenece a $f$, será un punto de equilibrio si $x^*$ es un punto fijo de $f$. En otras palabras, $x^*$ será una solución constante. Gráficamente, un punto de equilibrio es una coordenada de un punto donde $f$ se intersecta con la recta $y = x$. De aquí, que uno de los objetivos más importantes a la hora de estudiar sistemas dinámicos, es el de observar el comportamiento alrededor de una vecindad cercana a estas soluciones o puntos de equilibrio. Es lo que en la práctica se denomina, **análisis de estabilidad**.

Un ejemplo:

Sea $f: A \rightarrow A$, donde A es un subconjunto de ℝ. Si $x_0 \in A$ es un punto fijo de $f$, entonces $(x_0, f_{(x_0)}) = (x_0, x_0)$ . Este punto entonces se encontrara justo en la intersección entre $f$ y la recta $\{(x,y): x = y\}$. En la **Figura 4** se ilustra a modo de ejemplo una función que contiene 3 puntos fijos.

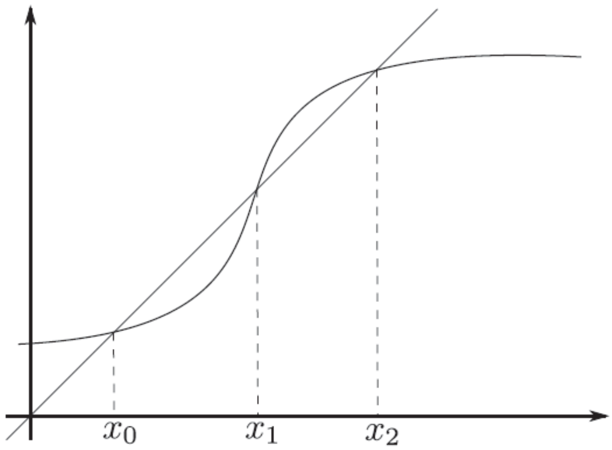


Figura 4 – $f$ con 3 puntos fijos –

Fuente: Davalos, Lango (2014)

Los puntos fijos juegan un rol importante en la dinámica. Encontrarlos en ocasiones no es tarea sencilla. Las funciones que tienen como dominio y codominio un intervalo, resultan ser muy útiles para estudiar estas orbitas. Un intervalo es un subconjunto de una recta real y será distinto de vacío. Existen distintos tipos de intervalos que se pueden clasificar entre abiertos, cerrados o acotados. Dado un intervalo, es posible hallar puntos fijos de funciones definidas en el a través del teorema del valor intermedio.

Recordando el **teorema** (su demostración puede verse en Spivak **(1999)**):

**Teorema n°3**: Sean A un intervalo en ℝ y $f: A \rightarrow A$ una función continua en A. Sean $a$ y $b$ dos puntos en A tales que $a < b$ , y sea M ∈ ℝ. Si **alguna** de las siguientes condiciones se cumple:

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f_{(a)} < M < f_{(b)} \\ \bullet\ f_{(a)} > M > f_{(b)} \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\ c,\ a < c < b \mid f_{(c)} = M$$

En base a este teorema se puede postular la siguiente **proposición**:

**Proposición 1**:

Sean $A$ un intervalo en $\mathbb{R}$ y $f: A \to A$ una función continua en $A$. Sea $[a,b]$ un intervalo contenido en $A$.

i. Si $f_{([a,b])} \subset [a,b] \Rightarrow f$ $tiene\ un\ punto\ fijo\ en\ [a,b]$
ii. Si $[a,b] \subset f_{([a,b])} \Rightarrow f$ $tiene\ un\ punto\ fijo\ en\ [a,b]$

La demostración de esta proposición se puede hallar en Davalos y Lango **(2014)**, aquí basta sencillamente con ver la siguiente ilustración **(Figura 5)** para captar conceptualmente que significa.

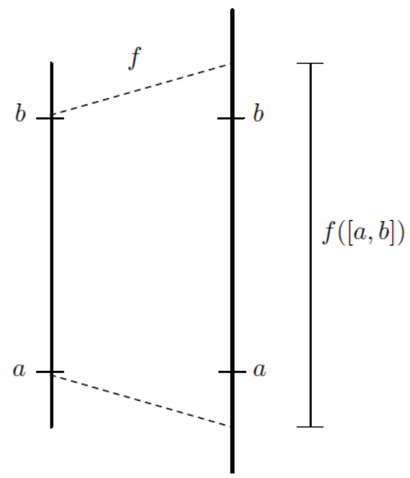


Figura 5 – Intervalo $[a,b]$ contenido en $f_{([a,b])}$ –

Fuente: Davalos, Lango (2014)

Una vez definido este concepto de punto fijo, es importante comenzar a determinar cierta clasificación de acuerdo al comportamiento que lo rodea.

Algunos aspectos resultan interesantes en el estudio de puntos fijos. Dado que son soluciones de un sistema dinámico, es importante el estudio del **comportamiento alrededor de su entorno**. En otras palabras, este tipo de aspectos definen a un punto fijo por las características de este comportamiento. A saber, estos pueden ser del tipo **repulsores, atractores o periódicos**.

Si un punto fijo es **atractor**, entonces los puntos cercanos a él tendrán orbitas que convergen a él. Por el contrario, si un punto fijo es **repulsor** los puntos a su alrededor se escaparán en un tiempo finito que depende de cada punto dentro de una vecindad.

Otra aspecto de relevancia es la existencia de una relación estrecha entre la derivada de una función $f$ en un punto fijo $x_0 \in A$ y el hecho de que este resulte atractor o repulsor. Así, se plantea la siguiente proposición.

**Proposición 2** (demostración también en Davalos, Lango **(2014)**):

Sea $x_0 \in \mathrm{A}$ tal que $f_{(x_0)} = x_0$. Además, supongamos que $f$ es derivable en $x_0$.

i. Si $\left|f'_{(x_0)}\right| < 1$, entonces $x_0$ es un punto fijo atractor, o asintóticamente estable.
ii. Si $\left|f'_{(x_0)}\right| > 1$, entonces $x_0$ es un punto fijo repulsor, o inestable.

Esta proposición es sencilla de demostrar a través de limites por definición. Por otra parte, también existe un **teorema** - **n°4** - que garantiza la posibilidad de que, dado un punto de equilibrio $x^*$ y una derivada $f'_{(x^*)} = 1$, es posible analizar el comportamiento, aunque con algo de precaución.

i. Si $f''_{(x^*)} \neq 0$, entonces $x^*$ es inestable.
ii. Si $f''_{(x^*)} = 0$ y $\left|f'''_{(x^*)}\right| > 0$, entonces $x^*$ es inestable.
iii. Si $f''_{(x^*)} = 0$ y $\left|f'''_{(x^*)}\right| < 0$, entonces $x^*$ es asintóticamente estable.

Otro criterio para el estudio en caso de ser necesario, se da a través del **teorema n°5** (la prueba de **este teorema y el n°4** pueden encontrarse en Elaydi **(2005)**):

Si se supone ahora que en el punto de equilibrio $x^*$, $f'_{(x^*)} = -1$ entonces:

i. Si $-f'''_{(x^*)} - \frac{3}{2} \cdot \left(f''_{(x^*)}\right)^2 < 0$, entonces $x^*$ es asintóticamente estable.
ii. Si $-f'''_{(x^*)} - \frac{3}{2} \cdot \left(f''_{(x^*)}\right)^2 > 0$, entonces $x^*$ es inestable.

Por otra parte, un punto fijo también puede ser clasificado como **periódico**. Conceptualmente esto significa que luego de cierto número de iteraciones el sistema retornara a este punto al cabo de cierto tiempo. En una definición más formal se sigue que, sean $f : X \to X$ y $x_0$. Se dice que $x_0$ es un **punto periódico** de $f$ si existe $n \in N \text{ tal que } f^n_{(x_0)} = x_0$. Al conjunto de todos los puntos periódicos de $f$ se denota por $Per(f)$. Si $x \in Per(f)$, se dice que $o(x, f)$ es una **órbita periódica**.

Entonces sea $x_0 \in Per(f)$. Decimos que $x_0$ tiene periodo $k$ si:

$$k = \min\left\{n \in \mathbb{N} : f^n_{(x_0)} = x_0\right\}$$

Si $x_0$ es un punto fijo de $f$, entonces $x_0 \in Per(f)$ y $x_0$ tiene periodo 1. Si $x_0$ es un punto periódico bajo $f$ de periodo $k$ con $k \geq 2$, entonces para cada $1 \leq j \leq k$ se tiene que $f^j_{(x_0)} \neq x_0$.

En algunas ocasiones dado $n \in \mathbb{N}$, se utiliza la siguiente notación:

$$Per_n(f) = \{x \in Per(f) : x \text{ es de periodo } n\}$$

Así, $$Per(f) = \bigcup_{n=1}^{\infty} Per_n(f)$$

Con lo cual, si para un punto $x \in X \; \exists \; N \in \mathbb{N} \mid f^N_{(x)} \in Per_{(f)}$, se dice que $x$ es un punto pre-periódico de $f$. En este caso también se dice $x$ tiene orbita pre-periódica. Usualmente este tipo de puntos también son llamados "eventualmente periódicos".

Por otro lado, estos puntos periódicos también se pueden definir como del tipo atractores o repulsores. O, en otras palabras, que su órbita es atractora o repulsora. En este sentido, esto dependerá de si $f$ es derivable en cada punto de la órbita de $x_0$. De ser así, $o(x_0, f)$, será atractora o repulsora si $\left|(f^N)'_{(x_0)}\right|$ es menor o mayor que 1.

A modo ilustrativo en la **Figura 6** se muestran algunos sistemas dinámicos donde se puede ver reflejado este **comportamiento periódico** de la órbita.

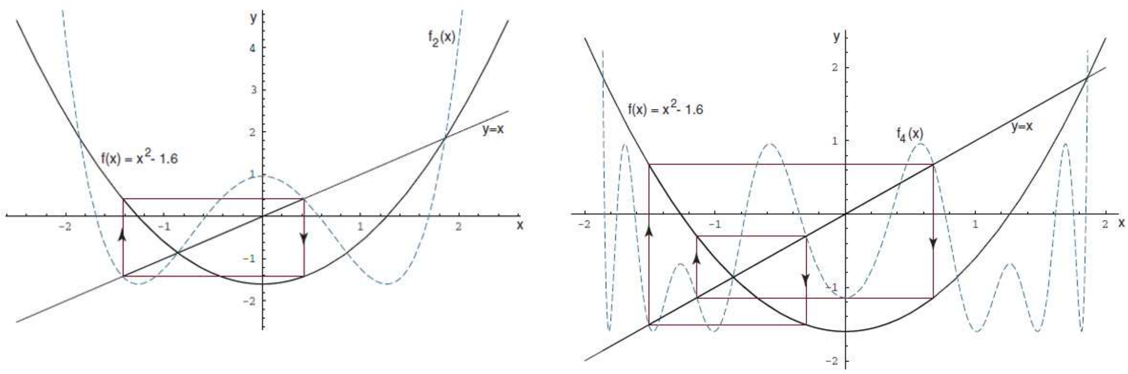


Figura 6 – Orbitas periódicas en sistemas dinámicos discretos –

Fuente: Machi (2009)

**Punto fijo una definición más general:**
Si una función $f$ se define en un espacio métrico $X$ **que no es necesariamente un intervalo**, entonces esto requiere modificar sutilmente las definiciones de punto fijo atractor y repulsor.

<u>Por ejemplo</u>:

Sea $f : X \to X$, y sea $x_0 \in X \; tal \; que \; f_{(x_0)} = x_0$. Se dice que $x_0$ es un punto fijo **atractor** de $f$ si para todo conjunto abierto $W$, $x_0 \in W$ existe un subconjunto abierto $U \subset W$ tal que $x_0 \in U$, $f_{(U)} \subset U$, y para toda $x \in U$ se tiene que:

$$\lim_{n \to \infty} f^n_{(x)} = x_0$$

Entonces, se dice que $x_0$ es un punto **repulsor** de $f$ si existe un subconjunto abierto $U$ de $X$ tal qué $x_0 \in U$ y para cada $x \in U$, $x \neq x_0$, $\exists\, n \in \mathbb{N}$, $n$ depende de $x$, tal qué $f^n_{(x)} \notin U$.

También se suele denominar como "**cuenca de atracción**" de $x_0$ a todo el conjunto de puntos de $X$ cuya orbita converge a $x_0$. Este conjunto puede ser denotado como $W^s_{(x_0)}$. Análogamente pueden definirse las orbitas periódicas atractoras y repulsoras.

### 5.3 Orbitas estables y estabilidad

Se dice que un punto fijo $x_0$ es estable (o tiene orbita estable) si $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0\ tal\ que\ \forall\, x \in B_{(x_0,\delta)}$, y para toda $n \geq 0$ se tiene que:

$$d_{(f^n_{(x)},x_0)} < \varepsilon$$

Los puntos cercanos no necesariamente poseen orbitas que convergen a $x_0$, pero lo interesante es que estas orbitas **tampoco se alejan** más allá de una distancia $\varepsilon > 0$ de este punto fijo.

Análogamente un punto fijo resulta inestable (o su órbita) si $\exists\, \varepsilon_0 > 0\ tal\ que\ \forall\, \delta > 0\ \exists\, x \in B_{(x_0,\delta)}\ y\ n \in \mathbb{N}$ tales que:

$$d_{(f^n_{(x)},x_0)} \geq \varepsilon_0$$

**Estabilidad en el sentido de Lyapunov**

Un punto de equilibrio $x^* \in \mathbb{C}^d$ se dice **estable en el sentido de Lyapunov** si para cada $\varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ tal\ que \left\| x_{(k)} - x^* \right\| \leq \varepsilon\ \forall\, k \geq 0\ siempre\ que \left\| x_{(0)} - x^* \right\| \leq \delta$.

**Estabilidad asintótica**

Un punto de equilibrio $x^* \in \mathbb{C}^d$ se dice que es **asintóticamente estable** si es estable en el sentido de Lyapunov **y existe** $\delta > 0$ tal que para $\left\| x_{(0)} - x^* \right\| \leq \delta\ se\ tiene\ x_{(k)} \to x^*\ cuando\ k \to \infty$. Además, el punto $x^*$ es asintóticamente estable de manera global, si es asintóticamente estable y $x_{(k)} \to x^*\ cuando\ k \to \infty\ \forall\, x_{(0)} \in \mathbb{C}^d$.

Ambas definiciones confirman que un punto de equilibrio es estable si dada cualquier bola con centro en el punto de equilibrio, se puede encontrar otra (posiblemente más pequeña) de modo tal que todas las trayectorias del sistema que inicien en un punto de la segunda bola se mantengan dentro de la primera. Además, si todas las trayectorias convergen al punto de equilibrio entonces este es asintóticamente estable. Como se puede observar la estabilidad en el sentido de Lyapunov es un criterio más débil que el de estabilidad asintótica.

### 5.4 Valores y vectores propios

A partir de estas definiciones de punto fijo, orbita y estabilidad, sus clasificaciones según sus características, y los teoremas que ayudan a estudiar las cualidades de estos. Se puede comenzar a realizar un análisis cuantitativo y cualitativo de las trayectorias que presentan. Una de las **técnicas más usuales** en este sentido tiene su origen en el álgebra lineal, más específicamente a través de la búsqueda de lo que se conocen como "**eigenvectors**" y "**eigenvalues**", o lo que en español se suele denominar **vectores y valores propios** o característicos. Se ha visto anteriormente, que un sistema dinámico discreto está compuesto por ecuaciones en diferencia. Y, además, se ha visto cierta solución general de una ecuación en diferencia típica.

En el caso de sistemas dinámicos, compuestos por más de una ecuación en diferencias, esta técnica del algebra lineal es muy popular y de gran utilidad en la práctica. No se hará énfasis en los pormenores de esta práctica, sencillamente se hace un breve repaso de algunas cuestiones particulares, y se dará por sentado el conocimiento de la misma. Quien desee puede recurrir a libros de Algebra lineal como por ejemplo Grossman **(2008)**.

Así, se hace una sencilla demostración a través de un ejemplo:

Sea el siguiente sistema homogéneo: $\overrightarrow{x_{t+1}} = A \cdot x_t$

o en su forma matricial: $\begin{pmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{(11)} & a^{(12)} \\ a^{(21)} & a^{(22)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix}$

con una condición inicial: $\overrightarrow{x_0} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$

Una definición preliminar dice que, un escalar $\lambda$ se denomina valor propio de A si existe una solución no trivial $\overline{x} \neq \overline{0}$ de $A \cdot \overline{x} = \lambda \cdot \overline{x}$. Una de estas soluciones no triviales se denomina **vector propio** de A asociado al **valor propio** $\lambda$. Armados con esta definición se puede ver fácilmente que:

$$A \cdot \overline{x} = \lambda \cdot \overline{x} \Rightarrow \left(A - \lambda \cdot I\right) \cdot \overline{x} = \overline{0}$$

De esto se sigue que para que $\lambda$ sea valor propio de A el sistema debe tener una **solución no trivial**, por lo que el determinante de $\left(A - \lambda \cdot I\right) = 0$ debe ser cero. Se dice entonces que los valores propios de una matriz son las raíces del polinomio característico $P_{(\lambda)} = \det\left(A - \lambda \cdot I\right), \, donde \, \det\left(A - \lambda \cdot I\right) = 0$.

En este ejemplo, donde $A \in \mathbb{R}^{2x2}$, para hallar los valores propios se plantea el polinomio característico:

$$P_{(\lambda)} = \det\left(A - \lambda \cdot I\right) = 0$$

$$\Rightarrow \det\left(A - \lambda \cdot I\right) = 0 \Rightarrow \det\begin{pmatrix} a^{(11)} - \lambda & a^{(12)} \\ a^{(21)} & a^{(22)} - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

En este caso, es sencillo demostrar que el determinante de una matriz cuadrada de 2 x 2 es igual a $\lambda^2 - Tr(A) \cdot \lambda + \det(A) = 0$. Por lo que,

$$\lambda^2 - \left(a^{(11)} + a^{(22)}\right) \cdot \lambda + a^{(21)}a^{(12)} - a^{(11)}a^{(22)} = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{\left(a^{(11)} + a^{(22)}\right) \pm \sqrt{\left(a^{(11)} + a^{(22)}\right)^2 - 4\left(a^{(21)}a^{(12)} - a^{(11)}a^{(22)}\right)}}{2}$$

Donde $\lambda_{1,2}$ son las raíces del polinomio característico, y en definitiva, los valores característicos que indican donde se hallan los puntos críticos del sistema. Una vez hallados, ya es posible inferir cualitativamente cierto comportamiento de este sistema alrededor de ellos. Es decir, es posible **estudiar la estabilidad del sistema**. Las raíces características pueden presentarse en 3 situaciones posibles dependiendo de la raíz cuadrada. A saber, estas pueden ser, "**reales y distintas**", "**reales repetidas**" o "**raíces complejas**". En este sentido, si bien el comportamiento puede diferir entre estas situaciones. Se puede resumir que, la **condición de convergencia** para los tres casos dice que la trayectoria de tiempo va a convergir en el equilibrio intertemporal (estacionario o móvil), si y sólo si, el valor absoluto de cada una de las raíces es menor que 1, independientemente de cuáles puedan ser las condiciones iniciales.
Una vez hallados los valores característicos, la solución general del sistema puede formalizarse hallando los vectores propios correspondientes a cada valor propio. Usualmente, si el sistema es un sistema homogéneo bastara con hallar sus soluciones. Cuando se habla de sistemas donde se tienen más de un valor propio, es preciso garantizar que las soluciones sean linealmente independientes. Por otro lado, existen situaciones donde el sistema no es homogéneo y se requiere, además, hallar alguna solución particular complementaria.

Entonces, luego de un repaso sobre la discusión de los efectos de comercio internacional, la teoría de crecimiento balanceado junto con el modelo dinámico de Leontief y un breve repaso sobre sistemas dinámicos discretos y su análisis mediante la técnica de autovalores y autovectores. Es posible ya comenzar con el planteo del modelo exógeno, autónomo y lineal de crecimiento de PBI balanceado entre socios comerciales.

# 6. *Modelo exógeno, autónomo y lineal de crecimiento de PBI balanceado entre socios comerciales*

## 6.1 Introducción

Como se ha visto en el apartado de comercio internacional, existen infinidad de modelos que buscan explicar las causas del comercio internacional y analizar los efectos. En este sentido, existe gran debate sobre los aspectos positivos y negativos producto del intercambio comercial. En principio, se presupone que este intercambio puede ofrecer grandes beneficios a las tasas de crecimiento de las economías que puedan colaborar entre sí, mediante una coordinación y planificación estratégica. Así como Nurske, en su teoría de crecimiento balanceado, planteaba la necesidad de impulsar la economía en forma conjunta entre los sectores, esto bien podría pensarse de forma análoga en términos internacionales. En muchos trabajos cuantitativos como los citados en la introducción de comercio internacional, se han observado economías donde en algunos periodos han conseguido tasas de crecimiento extremadamente altas. Y otras, en cambio, que han tenido desempeños poco significativos. Generalmente, comparar economías suele resultar complejo por varios factores, entre ellos la eficiencia (esto influye más que el tamaño del mercado), o por ejemplo su posición estratégica y los costos de transporte, entre otros. Todo esto hace que la comparación se torne dificultosa. Sin embargo, analizar los beneficios producto del intercambio comercial entre ellas, puede arrojar indicios de cómo obtener resultados óptimos en términos de crecimiento para estas economías en su conjunto. Actualmente, casi todas las economías mantienen cierto nivel de intercambio. Este intercambio, a veces, puede provocar algún desequilibrio, pero en general se pueden obtener grandes beneficios. Así, se analizó, teniendo en cuenta lo discutido sobre crecimiento balanceado, cual es el efecto del comercio internacional en estas tasas de crecimiento. Cuál es el impacto del intercambio comercial, y si este es beneficioso o no, estudiando diferentes escenarios. Como ya se ha adelantado, la intención aquí fue utilizar un enfoque macro dinámico inspirado en el modelo dinámico de Leontief multisectorial. De forma análoga a este último, se modeló la interacción comercial entre economías a lo largo del tiempo, desagregando sus tasas de crecimiento entre las obtenidas por motus propio y las que se obtienen producto del intercambio, para poder analizar así, su comportamiento en el largo plazo. Para tal fin, se hizo uso de sistemas dinámicos en tiempo discreto, para poder estudiar el comportamiento en el largo plazo de las economías que mantienen cierto grado de intercambio, y como impacta esto en sus tasas de crecimiento. Así, luego de hallar las trayectorias de crecimiento balanceado se buscó dar con el estado óptimo que garantice, a su vez, que ambas economías obtengan mayores beneficios para la sociedad en su conjunto. Para fines de simplificación se trabajó el caso de sistemas autónomos, se realizó un modelo teórico que brinda la suficiente información para poder estudiar estas cuestiones. En el caso de sistemas no-autónomos, dado que el análisis teórico puede resultar sumamente complejo por cuestiones topológicas, no se profundizo en este sentido, pero bien podría plantearse algún caso numérico sencillo con cadenas de Markov para analizar su comportamiento.

Este modelo, desde luego, es una aproximación lineal en el cual, las tasas están dadas de manera exógena. Por esto, no se pretende justificar las tasas de crecimiento propias y las de intercambio, sino simplemente estudiar su impacto en el comportamiento cuando estas varían. Así, se buscó dar con la existencia de trayectorias de crecimiento balanceadas y su nivel óptimo. Y con esto, responder la interrogante acerca del beneficio del comercio internacional como herramienta para el crecimiento y el desarrollo. A continuación, se darán más detalles al respecto. Y por supuesto que esto, también, puede servir de inspiración para realizar modelos de corte endógeno que si puedan explicar la variación de las tasas de crecimiento propias y las de intercambio.

Por otra parte, es necesario hacer un punto para resaltar el espíritu de la simplificación de este modelo de trabajo. A menudo se discute, si la simplificación de un modelo conlleva a una falta de realismo que termina proporcionando respuestas incorrectas. Pero en verdad, esto puede resultar virtuoso, mostrar ciertas características en un marco ideal puede hacer que la falta de realismo sea una virtud. Al aislar los efectos que realmente interesan, esta simplificación hace que sean más fáciles de entender. En este sentido precisamente, este modelo es una suerte de reducción del caso de intercambio de las j economías distintas de i. A saber, se hace un procedimiento sencillo sobre un caso de 2 economías para estudiar la incidencia del intercambio comercial en sus tasas de crecimiento. En la realidad, por lo general, las economías tienen un grado de apertura comercial e inserción al comercio global que lejos está de ser representada solo entre 2 economías. Pero, si se intentara realizar una aproximación mediante la ecuación **(1)**, esto es, con la sumatoria de todas las economías con quien intercambia una economía. Así, el modelo podría ser bastante aproximado.

Ejemplo de esto:

Se conoce que Argentina y Brasil son socios comerciales estratégicos. Si se tomara un periodo de 10 años de gran crecimiento en la región (2002-2012), se tiene que Brasil represento un 23% del intercambio comercial aproximadamente. Pero si se utilizara este modelo solo con estos 2 países, no se encontrarían resultados significativos. Esto es porque, además, sería necesario contemplar el gran flujo de intercambio con otros países, como por ejemplo algunos del sudeste asiático. En este caso entonces, sería correcto tomar un modelo como **(1)**:

$$X_{t+1}^{(i)} = \alpha_t^{(i)} X_t^{(i)} + \sum_{j \neq i} \beta_t^{(ij)} X_t^{(j)} \quad (1)$$

Donde esta sumatoria contemplaría todos los países con quien Argentina mantendría intercambio comercial.

Pero aquí, por fines de simplificación basta con trabajar con un modelo sencillo de 2 países.

Este modelo desde luego, como ya se ha mencionado, además, no pretende explicar cómo se determinan las tasas de crecimiento propias y de intercambio, sino estudiar cuál es su impacto en las tasas de crecimiento totales de estas economías. Y que beneficios podría traer, el intercambio comercial mediante la coordinación y planificación entre socios estratégicos.

Por último, también es necesario remarcar nuevamente una cuestión debatida en la introducción sobre comercio internacional. Esto es, que por lo general existen diversos factores que influyen positiva o negativamente sobre las tasas de crecimiento de las economías. En otras palabras, no se pretende suponer que solo el intercambio comercial tiene un impacto positivo sobre el crecimiento. Se entiende que existen diversos factores que tienen impacto sobre las tasas de crecimiento. A saber, externalidades positivas o negativas (internas o externas), problemas estructurales de la economía, baja diversificación de las exportaciones, baja competitividad con respecto del resto del mundo, volatilidad macroeconómica, seguridad institucional, entre otras. Pero esto no significa que el comercio internacional no pueda ser una gran herramienta.

Dicho todo esto, se plantea el modelo:

### 6.2 Modelo General

Se plantea la evolución del PBI de un país, modelado como el resultado de la contribución aditiva de la propia economía -explicada por una proporción del PBI propio en el periodo anterior- y del intercambio económico con otros países -igualmente explicado por una proporción del PBI de dicho país en el periodo anterior-.

Se toma las tasas de crecimiento, tanto propias como de intercambio, como **dadas exógenamente**.

Se definen así:

- $X_t^{(i)}$ : PBI del i-ésimo país en el periodo "*t*"
- $\alpha_t^{(i)}$ : tasa de crecimiento "propia", del i-ésimo país en el periodo "*t*" debido a su respectiva economía.

**Supuesto (a)**: $\alpha_t^{(i)} \geq 1$; es decir, por simplicidad de análisis, se considerará el caso de en qué no hay contracción del aporte propio a la evolución de la economía.

- $\beta_t^{(ij)}$ : tasa de crecimiento de "intercambio", del i-ésimo país en el periodo "*t*" debido al comercio con el j-ésimo país.

**Supuesto (b)**: $0 \leq \beta_t^{(ij)} < 1$; es decir, el impacto del comercio internacional sobre el PBI de un país se puede suponer como fracciones del PBI de las otras economías. En la realidad esto sucede con regularidad, ya que en general, una economía no intercambia todo lo que produce.

De esta manera, el modelo queda expresado por

$$X_{t+1}^{(i)} = \alpha_t^{(i)} X_t^{(i)} + \sum_{j \neq i} \beta_t^{(ij)} X_t^{(j)} \qquad (1)$$

De aquí en más, por razones de simplicidad de planteo, pero sin quitar las características principales y propiedades de la propuesta, se tratará el **caso de solo dos países**.

$$\begin{pmatrix} X_{t+1}^{(1)} \\ X_{t+1}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_t^{(1)} & \beta_t^{(12)} \\ \beta_t^{(21)} & \alpha_t^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_t^{(1)} \\ X_t^{(2)} \end{pmatrix} \qquad (2)$$

Matemáticamente hablando, se trata de un sistema de ecuaciones lineales en diferencia de primer orden y homogéneo –ver pág.33 -.

Las tasas, en general dependientes del tiempo -sistema no autónomo- deberían ser explicadas por fuera del modelo.

### 6.3 Solución del Caso Autónomo

El caso más simple, habitualmente primer abordaje de cualquier propuesta y objetivo de estudio en el presente trabajo, las tasas se supondrán constantes y dadas exógenamente. Es decir, se abordará el caso autónomo –ver definición pág.32 -:

$$\begin{pmatrix} X_{t+1}^{(1)} \\ X_{t+1}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^{(1)} & \beta^{(12)} \\ \beta^{(21)} & \alpha^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_t^{(1)} \\ X_t^{(2)} \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{X}_{t+1} = A.\boldsymbol{X}_t \;/\; A \in \mathbb{R}^{2x2} \qquad (3)$$

A partir de la teoría de los sistemas autónomos –ver definición pág.32 -, en este caso particular, se obtiene

- ***Conclusión 1***: Bajo el **supuesto (a)**, la traza es $tr = tr(A) > 2$.

- **Conclusión 2**: Dada la ***Conclusión 1***, el sistema **no es estable** (condición necesaria de estabilidad es $tr < 1$).

- ***Conclusión 3***: Bajo los **supuestos (a) y (b)** $\det(A) = \Delta = \underbrace{\alpha^{(1)}\alpha^{(2)}}_{>1} - \underbrace{\beta^{(12)}\beta^{(21)}}_{<1} \Rightarrow \Delta > 0$.

Como se introdujo en capítulos anteriores, un sistema como **(3)** se resuelve a partir de los valores y vectores propios de la matriz **A**. Tal que la solución general tiene la forma

$$\boldsymbol{X}_t = C_1 \boldsymbol{V}_1 \lambda_1^t + C_2 \boldsymbol{V}_2 \lambda_2^t \tag{4}$$

Donde los $\lambda_i \in \mathbb{R}$ y $\boldsymbol{V_i} \in \mathbb{R}^{2\times 1}$ son los valores y vectores propios de **A**, respectivamente, y $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ constantes.

Como se mencionó en el apartado de sistemas dinámicos discretos, se hallarán entonces primero los valores propios de la matriz **A**. Con los que luego se dará con los vectores propios correspondientes, que darán forma a la solución general del sistema. Entonces,

**6.3.1** Valores propios:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} \alpha^{(1)} - \lambda & \beta^{(12)} \\ \beta^{(21)} & \alpha^{(2)} - \lambda \end{vmatrix} = \left(\alpha^{(1)} - \lambda\right)\left(\alpha^{(2)} - \lambda\right) - \beta^{(12)}\beta^{(21)} =$$

$$= \lambda^2 - \left(\alpha^{(1)} + \alpha^{(2)}\right) + \alpha^{(1)}\alpha^{(2)} - \beta^{(12)}\beta^{(21)} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - tr.\lambda + \Delta = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{tr \pm \sqrt{tr^2 - 4\Delta}}{2} \tag{5}$$

De (5) los valores propios, resultan

$$\lambda_{1,2} = \left(\frac{\alpha^{(1)} + \alpha^{(2)}}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha^{(1)} + \alpha^{(2)}}{2}\right)^2 - \left(\alpha^{(1)}\alpha^{(2)} - \beta^{(12)}\beta^{(21)}\right)} =$$

$$= \left(\frac{\alpha^{(1)} + \alpha^{(2)}}{2}\right) \pm \underbrace{\sqrt{\left(\frac{\alpha^{(1)} - \alpha^{(2)}}{2}\right)^2 + \beta^{(12)}\beta^{(21)}}}_{\geq 0} \tag{6}$$

Y de (6) se obtiene

- ***Conclusión 4***: Esto implica, raíces reales y distintas, salvo el caso de igual crecimiento propio ($\alpha^{(1)} = \alpha^{(2)}$) y sin intercambio ($\beta^{(12)} = \beta^{(21)} = 0$). Esto último implicaría, raíces repetidas.

De (5):

$$\lambda_{1,2}=\frac{tr}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{tr}{2}\right)^2-\Delta}=\frac{tr}{2}.\left(1\pm\sqrt{1-\frac{4\Delta}{tr^2}}\right) \tag{7}$$

- ***Conclusión 5*** (sobre $\lambda_2$): De (7)

$$\lambda_2=\underbrace{\frac{tr}{2}}_{>1}.\overbrace{\left(1+\underbrace{\sqrt{1-\frac{4\Delta}{tr^2}}}_{>0}\right)}^{>1}\Rightarrow\lambda_2>1 \tag{8}$$

Por lo menos una raíz es mayor que uno (en acuerdo con la ***conclusión 2***).

- ***Conclusión 6*** (sobre $\lambda_1$): De (6) y suponiendo que $\lambda_1\le 0$ se tendría

Si

$$\lambda_1=\left(\frac{\alpha^{(1)}+\alpha^{(2)}}{2}\right)-\sqrt{\left(\frac{\alpha^{(1)}-\alpha^{(2)}}{2}\right)^2+\beta^{(12)}\beta^{(21)}}\le 0\Leftrightarrow\left(\frac{\alpha^{(1)}+\alpha^{(2)}}{2}\right)\le\sqrt{\left(\frac{\alpha^{(1)}-\alpha^{(2)}}{2}\right)^2+\beta^{(12)}\beta^{(21)}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{\alpha^{(1)}+\alpha^{(2)}}{2}\right)^2-\left(\frac{\alpha^{(1)}-\alpha^{(2)}}{2}\right)^2\le\beta^{(12)}\beta^{(21)}\Leftrightarrow\alpha^{(1)}\alpha^{(2)}\le\beta^{(12)}\beta^{(21)}$$

**Absurdo**; porque contradice los supuestos (a) y (b) -las tasas de intercambio son menores y las propias mayores a uno respectivamente-. Entonces se concluye que

$$\lambda_1>0 \tag{9}$$

- ***Conclusión 7*** (sobre $\lambda_1$): Teniendo en cuenta la ***conclusión*** 1, de (6) y suponiendo que fuese $\lambda_1\le 1$ se obtiene

$$\lambda_1=\left(\frac{\alpha^{(1)}+\alpha^{(2)}}{2}\right)-\sqrt{\left(\frac{\alpha^{(1)}-\alpha^{(2)}}{2}\right)^2+\beta^{(12)}\beta^{(21)}}\le 1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0<\left(\frac{\alpha^{(1)}+\alpha^{(2)}}{2}\right)-1\le\sqrt{\left(\frac{\alpha^{(1)}-\alpha^{(2)}}{2}\right)^2+\beta^{(12)}\beta^{(21)}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0<\left(\frac{\alpha^{(1)}+\alpha^{(2)}}{2}\right)^2-\left(\alpha^{(1)}+\alpha^{(2)}\right)+1\le\left(\frac{\alpha^{(1)}-\alpha^{(2)}}{2}\right)^2+\beta^{(12)}\beta^{(21)}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\alpha^{(1)}\alpha^{(2)}-\left(\alpha^{(1)}+\alpha^{(2)}\right)+1\le\beta^{(12)}\beta^{(21)}\Leftrightarrow$$

Por lo tanto

$$\lambda_1 \leq 1 \Leftrightarrow \alpha^{(1)}\alpha^{(2)} - \left(\alpha^{(1)} + \alpha^{(2)}\right) + 1 \leq \beta^{(12)}\beta^{(21)} \qquad (10)$$

Ejemplos **A**:

$$\begin{cases} \alpha^{(1)} = 1,075 \\ \alpha^{(2)} = 1,015 \\ \beta^{(12)} = \beta^{(21)} = 0,03 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 \simeq 1,0026 > 1 \leftarrow \alpha^{(1)}\alpha^{(2)} - \left(\alpha^{(1)} + \alpha^{(2)}\right) + 1 \leq \beta^{(12)}\beta^{(21)} \Rightarrow 0,001125 \not\leq 0,0009 \\ \lambda_2 \simeq 1,0874 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha^{(1)} = 1,075 \\ \alpha^{(2)} = 1,015 \\ \beta^{(12)} = \beta^{(21)} = 0,04 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0,995 < 1 \leftarrow \alpha^{(1)}\alpha^{(2)} - \left(\alpha^{(1)} + \alpha^{(2)}\right) + 1 \leq \beta^{(12)}\beta^{(21)} \Rightarrow 0,001125 < 0,0016 \\ \lambda_2 = 1,095 \end{cases}$$

En resumen, de las conclusiones 5 a 7, se tiene que ninguna raíz es negativa y que por lo menos una es mayor a uno.

### **6.3.2** Vectores Propios

A partir de los valores propios se hallan los vectores propios correspondientes según

$$(A - \lambda_k)\boldsymbol{V}_k = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha^{(1)} - \lambda_k & \beta^{(12)} \\ \beta^{(21)} & \alpha^{(2)} - \lambda_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{k1} \\ v_{k2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (11)$$

Así, (6) y (11):

$$\alpha^{(1)} - \lambda_{1,2} = \left(\frac{\alpha^{(1)} - \alpha^{(2)}}{2}\right) \mp \sqrt{\left(\frac{\alpha^{(1)} - \alpha^{(2)}}{2}\right)^2 + \beta^{(12)}\beta^{(21)}} \qquad (12)$$

$$\alpha^{(2)} - \lambda_{1,2} = -\left(\frac{\alpha^{(1)} - \alpha^{(2)}}{2}\right) \mp \sqrt{\left(\frac{\alpha^{(1)} - \alpha^{(2)}}{2}\right)^2 + \beta^{(12)}\beta^{(21)}} \qquad (13)$$

Y definiendo

$$\delta_1 = \frac{\alpha^{(1)} - \alpha^{(2)}}{2}, \ \delta_2 = \delta_1^{\ 2} + \beta^{(12)}\beta^{(21)} \qquad (14)$$

Entonces, se tiene de (12), (13) y (14)

$$\begin{cases} \alpha^{(1)} - \lambda_{1,2} = \delta_1 \mp \sqrt{\delta_1^2 + \beta^{(12)}\beta^{(21)}} = \delta_1 \mp \sqrt{\delta_2} \\ \alpha^{(2)} - \lambda_{1,2} = -\delta_1 \mp \sqrt{\delta_1^2 + \beta^{(12)}\beta^{(21)}} = -\delta_1 \mp \sqrt{\delta_2} \end{cases} \tag{15}$$

Y de (11) y (15) resulta que

$$(A-\lambda_k)\boldsymbol{V}_k = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha^{(1)} - \lambda_k & \beta^{(12)} \\ \beta^{(21)} & \alpha^{(2)} - \lambda_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{k1} \\ v_{k2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \delta_1 \mp \sqrt{\delta_2} & \beta^{(12)} \\ \beta^{(21)} & -\delta_1 \mp \sqrt{\delta_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{k1} \\ v_{k2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{16}$$

Así, si $\lambda = \lambda_1$

$$\begin{pmatrix} \delta_1 + \sqrt{\delta_2} & \beta^{(12)} \\ \beta^{(21)} & -\delta_1 + \sqrt{\delta_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left(\delta_1 + \sqrt{\delta_2}\right) v_{11} + \beta^{(12)} v_{12} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{V}_1 = \begin{pmatrix} -\beta^{(12)} \\ \delta_1 + \sqrt{\delta_2} \end{pmatrix} \tag{17}$$

Y si $\lambda = \lambda_2$

$$\begin{pmatrix} \delta_1 - \sqrt{\delta_2} & \beta^{(12)} \\ \beta^{(21)} & -\delta_1 - \sqrt{\delta_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \beta^{(21)} v_{21} - \left(\delta_1 + \sqrt{\delta_2}\right) v_{22} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{V}_2 = \begin{pmatrix} \delta_1 + \sqrt{\delta_2} \\ \beta^{(21)} \end{pmatrix} \tag{18}$$

Una vez que se obtienen los vectores propios correspondientes a cada valor propio se plantea la solución general de la forma de **(4)**.

### **6.3.3** Solución General

Obtenidos los vectores propios correspondientes a cada valor propio se plantea la solución general.

De (4), (17) y (18) se tiene

$$\begin{pmatrix} X_t^{(1)} \\ X_t^{(2)} \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} -\beta^{(12)} \\ \delta_1 + \sqrt{\delta_2} \end{pmatrix} \lambda_1^{\,t} + C_2 \begin{pmatrix} \delta_1 + \sqrt{\delta_2} \\ \beta^{(21)} \end{pmatrix} \lambda_2^{\,t} \tag{19}$$

- ***Conclusión 8***: En (17) o (18) se resulta:

$$\delta_1+\sqrt{\delta_2}=\frac{\alpha^{(1)}-\alpha^{(2)}}{2}+\sqrt{\left(\frac{\alpha^{(1)}-\alpha^{(2)}}{2}\right)^2+\beta^{(12)}\beta^{(21)}}=$$

$$=\frac{\alpha^{(1)}-\alpha^{(2)}}{2}+\left|\frac{\alpha^{(1)}-\alpha^{(2)}}{2}\right|\underbrace{\sqrt{1+\frac{4\beta^{(12)}\beta^{(21)}}{\left(\alpha^{(1)}-\alpha^{(2)}\right)^2}}}_{>1}>0 \qquad (20)$$

Se sabe que, si se obtiene un valor propio positivo asociado a un vector propio positivo, el modelo adquiere sentido económico de crecimiento. Así, un conjunto de economías es capaz de obtener un crecimiento balanceado de su PBI, de igual manera que lo hace una economía entre sus sectores -modelo dinámico de Leontief pág.26 -. Matemáticamente, esto es posible, además, con base en los **teoremas de Frobenius (apéndice A)**.

Obsérvese que, el vector propio asociado a $\lambda_1$ tiene componentes de signos contrarios; por lo tanto, el autoestado asociado no corresponde a un estado económicamente viable - salvo el caso en que $\beta^{(12)}=0$ -. En cambio, el vector propio de $\lambda_2$ es **no negativo,** y es entonces económicamente posible y correspondería a una ***trayectoria de crecimiento balanceado***.

De esta manera, se puede garantizar la existencia de una trayectoria de crecimiento balanceado **independientemente de las condiciones iniciales**. En otras palabras, esto se garantiza desde cualquier momento en el tiempo. Ahora bien, es posible igualmente hallar una trayectoria balanceada dado un periodo considerado inicial. Entonces, se tiene:

**6.3.4** Condiciones Iniciales y solución particular:

Sean $X_0^{(1)}$ y $X_0^{(2)}$ los PBI de los dos países en el periodo considerado **inicial**. Así:

$$\begin{pmatrix}X_0^{(1)}\\X_0^{(2)}\end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix}-\beta^{(12)}\\\delta_1+\sqrt{\delta_2}\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}\delta_1+\sqrt{\delta_2}\\\beta^{(21)}\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}-\beta^{(12)}C_1+\left(\delta_1+\sqrt{\delta_2}\right)C_2=X_0^{(1)}\\\left(\delta_1+\sqrt{\delta_2}\right)C_1+\beta^{(21)}C_2=X_0^{(2)}\end{cases} \qquad (21)$$

El sistema de ecuaciones lineales planteado por (21) tiene única solución dado que a partir de la ***Conclusión 7*** y el **supuesto (b)** se llega a

$$\begin{vmatrix}-\beta^{(12)} & \delta_1+\sqrt{\delta_2}\\\delta_1+\sqrt{\delta_2} & \beta^{(21)}\end{vmatrix}=-\underbrace{\beta^{(12)}\beta^{(21)}}_{>0}-\underbrace{\left(\delta_1+\sqrt{\delta_2}\right)^2}_{>0}\neq 0 \qquad (22)$$

Resolviendo el sistema (21) se tiene

$$C_1^0 = \frac{-\beta^{(21)} X_0^{(1)} + \left(\delta_1 + \sqrt{\delta_2}\right) X_0^{(2)}}{\beta^{(12)}\beta^{(21)} + \left(\delta_1 + \sqrt{\delta_2}\right)^2} \tag{23.a}$$

$$C_2^0 = \frac{\beta^{(12)} X_0^{(2)} + \left(\delta_1 + \sqrt{\delta_2}\right) X_0^{(1)}}{\beta^{(12)}\beta^{(21)} + \left(\delta_1 + \sqrt{\delta_2}\right)^2} \tag{23.b}$$

Resultando en la solución particular en

$$\begin{pmatrix} X_t^{(1)} \\ X_t^{(2)} \end{pmatrix} = C_1^0 \begin{pmatrix} -\beta^{(12)} \\ \delta_1 + \sqrt{\delta_2} \end{pmatrix} \lambda_1^{\,t} + C_2^0 \begin{pmatrix} \delta_1 + \sqrt{\delta_2} \\ \beta^{(21)} \end{pmatrix} \lambda_2^{\,t} \tag{24}$$

En la siguiente ilustración – **Figura 7** – lo importante a destacar es que, a mayores tasas de intercambio, la convergencia entre ambas economías se da a mayor velocidad.

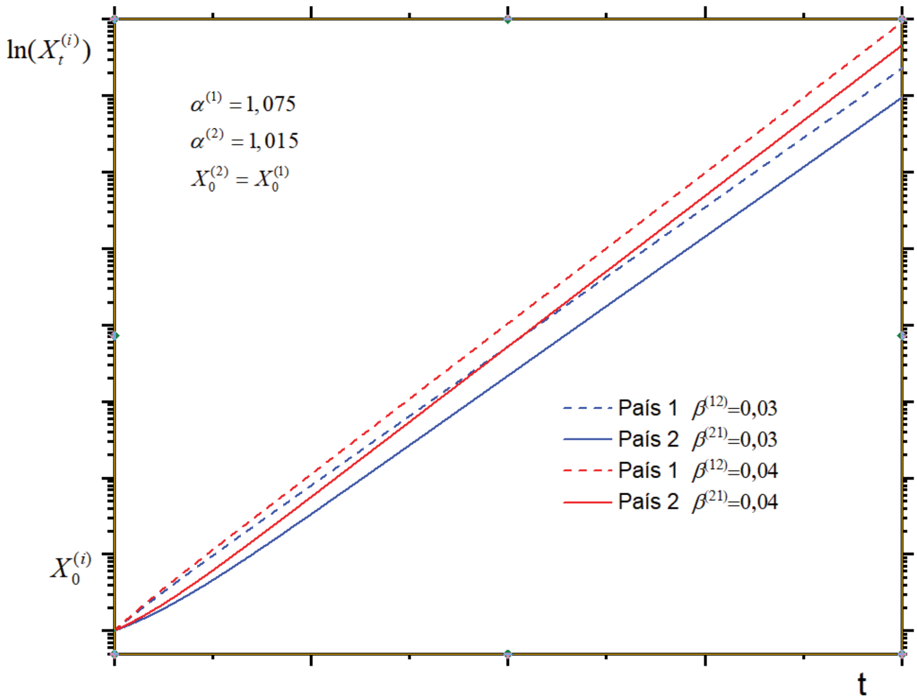


Figura 7 – Evolución del PBI para los ejemplos A -

### 6.4 Representación Normalizada

En algún caso puede ser interesante representar la evolución del PBI relativo a su valor inicial. Es decir, si se define

$$x_t^{(i)} = \frac{X_t^{(i)}}{X_0^{(i)}} \quad / \quad i = 1 \vee 2 \tag{25}$$

En tal caso, se tendrá

$$x_{t+1}^{(i)} = \frac{X_{t+1}^{(i)}}{X_0^{(i)}} = \alpha^{(i)} \cdot \frac{X_t^{(i)}}{X_0^{(i)}} + \underbrace{\left( \frac{X_0^{(j)}}{X_0^{(i)}} \beta^{(ij)} \right)}_{\beta^{(ij)}} \cdot \frac{X_t^{(j)}}{X_0^{(j)}} = \alpha^{(i)} \cdot x_t^{(i)} + \beta^{(ij)} \cdot x_t^{(j)} \quad / \quad i, j = 1 \vee 2 \quad i \neq j$$

(26)

Denominando tasas de intercambio normalizadas a las $\beta^{(ij)}$ . Y se puede demostrar que todos los resultados pueden ser escritos en variables normalizadas. Por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} x_t^{(1)} \\ x_t^{(2)} \end{pmatrix} = \frac{-\beta^{(21)} + \left(\delta_1 + \sqrt{\delta_2}\right)}{\beta^{(12)}\beta^{(21)} + \left(\delta_1 + \sqrt{\delta_2}\right)^2} \cdot \begin{pmatrix} -\beta^{(12)} \\ \delta_1 + \sqrt{\delta_2} \end{pmatrix} \lambda_1^{\,t} + \frac{\beta^{(12)} + \left(\delta_1 + \sqrt{\delta_2}\right)}{\beta^{(12)}\beta^{(21)} + \left(\delta_1 + \sqrt{\delta_2}\right)^2} \begin{pmatrix} \delta_1 + \sqrt{\delta_2} \\ \beta^{(21)} \end{pmatrix} \lambda_2^{\,t}$$

(27)

### **6.5** Soluciones Económicas y Estados Balanceados

Obviamente, de la naturaleza del modelo evolutivo, como resultado de la combinación lineal de cantidades positivas – ecuación (1)- resulta que $X_t^{(i)} > 0, \forall i, t$.

Pero el crecimiento está definido analíticamente por el aporte de dos términos exponenciales. Así, las características de tal crecimiento están dadas por la competencia de $\lambda_1$ y $\lambda_2$ .

En particular, como fue tratado en la Introducción, y análogamente al crecimiento de los sectores económicos, se puede proponer un **crecimiento balanceado entre países** como aquel proceso donde todos los países crecen a **igual tasa**.

El estudio siguiente corresponderá a tal análisis y su posibilidad de existencia.

### **6.6** Estados Asintóticos Balanceados

De las ***Conclusiones 5*** y **6** se sabe que el sistema diverge en un crecimiento dado por $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 > 1$. Como $\lambda_2 > \lambda_1$, a muy largo plazo, la potencia dominante será $\lambda_2$ ; y si además (***Conclusión 7***) $\lambda_1 < 1$ , su dominancia será más rápida temporalmente. Así, se obtiene un **crecimiento asintótico balanceado** donde ambos países tienden a crecer a la misma tasa $\lambda_2$. Entonces

$$\begin{pmatrix} X_t^{(1)} \\ X_t^{(2)} \end{pmatrix} \xrightarrow[t\to+\infty]{} \begin{pmatrix} X_t^{(1)} \\ X_t^{(2)} \end{pmatrix}_{\text{Asint.}} \approx \frac{\beta^{(12)} X_0^{(2)} + \left(\delta_1 + \sqrt{\delta_2}\right) X_0^{(1)}}{\beta^{(12)}\beta^{(21)} + \left(\delta_1 + \sqrt{\delta_2}\right)^2} \begin{pmatrix} \delta_1 + \sqrt{\delta_2} \\ \beta^{(21)} \end{pmatrix} \lambda_2^{\,t} \tag{28}$$

De lo cual:

$$\left(\frac{X_t^{(1)}}{X_t^{(2)}}\right)_{\text{Asint.}} \approx \frac{\delta_1 + \sqrt{\delta_1^{\,2} + \beta^{(12)}\beta^{(21)}}}{\beta^{(21)}} = \frac{\beta^{(12)}}{-\delta_1 + \sqrt{\delta_1^{\,2} + \beta^{(12)}\beta^{(21)}}} \tag{29}$$

De (29) es sencillo demostrar que los términos de ambos lados de la igualdad son equivalentes. Plantear esta equivalencia, es de gran utilidad para un posterior análisis de la dependencia de los estados asintóticos con la variación de los parámetros del modelo.

En la **Figura 8** se grafica la fracción $\left(X_t^{(i)} / X_t^{(i)}\right)_{\text{Asint}}$ para el Ejemplo **A** y se observa que la convergencia es más rápida a mayores tasas de intercambio. Igualmente, para dichos conjuntos de tasas la convergencia se da con diferencias de menos del 1% a más de 60 periodos. Esto significa, que las tasas de intercambio comercial ejercen gran un impacto sobre el crecimiento.

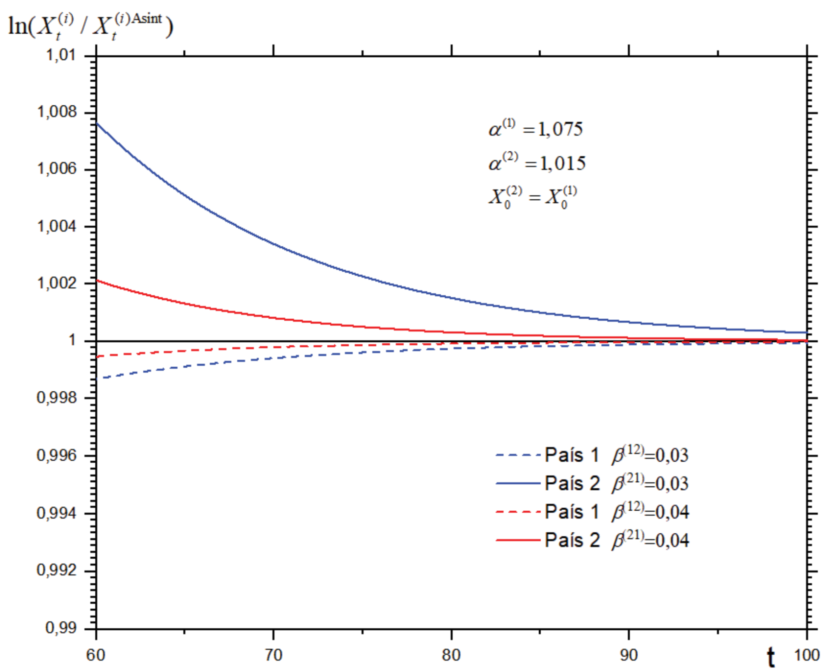


Figura 8 – Velocidad de convergencia para los ejemplos A -

Con una pequeña variación en las tasas de intercambio la velocidad de convergencia es muy significativa. Esto puede ser aprovechado por una economía que posea un menor tamaño de su PBI.

En cuanto a la dependencia de los estados asintóticos con la variación de los parámetros, se obtiene entonces de (29) – para ambas equivalencias -:

$$\frac{\partial}{\partial \delta_1}\left(\frac{X_t^{(1)}}{X_t^{(2)}}\right)_{\text{Asint.}} \approx \frac{\partial}{\partial \delta_1}\left(\frac{\delta_1+\sqrt{\delta_1^{\,2}+\beta^{(12)}\beta^{(21)}}}{\beta^{(21)}}\right)=\frac{1}{\beta^{(21)}}\left(1+\frac{\delta_1}{\sqrt{\delta_1^{\,2}+\beta^{(12)}\beta^{(21)}}}\right)>0 \qquad (30.a)$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta^{(12)}}\left(\frac{X_t^{(1)}}{X_t^{(2)}}\right)_{\text{Asint.}} \approx \frac{\partial}{\partial \beta^{(12)}}\left(\frac{\delta_1+\sqrt{\delta_1^{\,2}+\beta^{(12)}\beta^{(21)}}}{\beta^{(21)}}\right)=\frac{1}{2\sqrt{\delta_1^{\,2}+\beta^{(12)}\beta^{(21)}}}>0 \qquad (30.b)$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta^{(21)}}\left(\frac{X_t^{(1)}}{X_t^{(2)}}\right)_{\text{Asint.}} \approx \frac{\partial}{\partial \beta^{(21)}}\left(\frac{\beta^{(12)}}{-\delta_1+\sqrt{\delta_1^{\,2}+\beta^{(12)}\beta^{(21)}}}\right)=$$

$$=-\frac{\beta^{(12)2}}{2\left(-\delta_1+\sqrt{\delta_1^{\,2}+\beta^{(12)}\beta^{(21)}}\right)^2\cdot\sqrt{\delta_1^{\,2}+\beta^{(12)}\beta^{(21)}}}<0 \qquad (30.c)$$

**6.7** Existencia de Trayectorias Balanceadas

Una trayectoria balanceada corresponde a la situación donde ambos países crecen a **igual tasa *a todo tiempo***. Matemáticamente hablando se trata de que a todo tiempo el crecimiento esté definido por la misma exponencial; es decir que solo un término de (27) defina la evolución y que este sea definido económicamente - no negativo-.

Entonces, como ya se mencionó en (27), se puede ver que el vector propio asociado a $\lambda_1$ tiene componentes de signos contrarios; por lo tanto, el autoestado asociado no corresponde a un estado económicamente viable - salvo el caso en que $\beta^{(12)}=0$ -. En cambio, el vector propio de $\lambda_2$ es **no negativo,** y es entonces económicamente posible y compatible con una ***trayectoria de crecimiento balanceado***.

- ***Conclusión* 9**: Si se plantea la posibilidad matemática de una trayectoria con solo el primer autoestado ($C_2=0$)

$$C_2 \propto \begin{vmatrix} -\beta^{(12)} & X_0^{(1)} \\ \delta_1+\sqrt{\delta_2} & X_0^{(2)} \end{vmatrix} = -\beta^{(12)}X_0^{(2)}-\left(\delta_1+\sqrt{\delta_2}\right)X_0^{(1)} \neq 0 \qquad (31)$$

Se encuentra que efectivamente ésta **no** es posible. Esto se debe, como se dijo anteriormente, a que el modelo con condiciones iniciales positivas y evolución debido a una combinación lineal de factores positivos **no** puede dar soluciones negativas.

- ***Conclusión 10***: Si se plantea la posibilidad matemática de una trayectoria con el segundo autoestado ( $C_1 = 0$ )

$$C_1 \propto \begin{vmatrix} X_0^{(1)} & \delta_1 + \sqrt{\delta_2} \\ X_0^{(2)} & \beta^{(21)} \end{vmatrix} = \beta^{(21)} X_0^{(1)} - \left(\delta_1 + \sqrt{\delta_2}\right) X_0^{(2)} \qquad (32)$$

Entonces se tiene que, finalmente, **puede haber** condiciones iniciales que determinen la trayectoria de crecimiento balanceado:

$$\beta^{(21)} X_0^{(1)} - \left(\delta_1 + \sqrt{\delta_2}\right) X_0^{(2)} = 0 \Rightarrow \frac{X_0^{(2)}}{X_0^{(1)}} = \frac{\beta^{(21)}}{\delta_1 + \sqrt{\delta_2}} \Rightarrow \frac{X_0^{(1)}}{X_0^{(2)}} = \frac{\delta_1 + \sqrt{\delta_1^{\;2} + \beta^{(12)}\beta^{(21)}}}{\beta^{(21)}} \qquad (33)$$

$$\Rightarrow \frac{X_0^{(1)}}{X_0^{(2)}} \beta^{(21)} - \frac{X_0^{(2)}}{X_0^{(1)}} \beta^{(12)} = \alpha^{(1)} - \alpha^{(2)} \qquad (34)$$

- ***Conclusión 11***: Se da una trayectoria balanceada cuando la diferencia de las tasas propias es igual a la diferencia opuesta de las tasas de intercambio normalizadas:

$$\overline{\beta}^{(21)} - \overline{\beta}^{(12)} = \alpha^{(1)} - \alpha^{(2)} \qquad (35)$$

Así, de (24) y en las condiciones de (34)

$$\begin{pmatrix} X_t^{(1)} \\ X_t^{(2)} \end{pmatrix}_{\text{Trayec.Bal.}} = \begin{pmatrix} X_0^{(1)} \\ X_0^{(2)} \end{pmatrix} \lambda_2^t \qquad (36)$$

O bien $x_t^{(i)} = \lambda_2^{\,t} \quad / \quad i = 1 \vee 2$

Por lo tanto

$$\left(\frac{X_t^{(1)}}{X_t^{(2)}}\right)_{\text{Trayec.Bal.}} = \frac{X_0^{(1)}}{X_0^{(2)}} \qquad (37)$$

- ***Conclusión 12***: De lo cual se desprende que en una trayectoria balanceada el tamaño relativo de los PBI se mantiene.

En otro caso disminuye o aumenta. Si se plantea la situación donde el tamaño relativo entre las economías -medido por su PBI del país 1 respecto del 2- disminuye a largo plazo; es decir, si asintóticamente se tendría:

$$\left(\frac{X_t^{(1)}}{X_t^{(2)}}\right)_{\text{Asint.}} < \left(\frac{X_t^{(1)}}{X_t^{(2)}}\right)_{\text{Trayec.Bal.}} \Leftrightarrow \frac{\delta_1 + \sqrt{\delta_1^{\,2} + \beta^{(12)}\beta^{(21)}}}{\beta^{(21)}} < \frac{X_0^{(1)}}{X_0^{(2)}} \Leftrightarrow \ldots$$

$$\ldots \Leftrightarrow \frac{X_0^{(1)}}{X_0^{(2)}}\beta^{(21)} - \frac{X_0^{(2)}}{X_0^{(1)}}\beta^{(12)} > \alpha^{(1)} - \alpha^{(2)} \qquad (38)$$

Ejemplo **B**:

$$\begin{cases} \alpha^{(1)} = 1{,}075 \\ \alpha^{(2)} = 1{,}015 \\ \beta^{(12)} = \beta^{(21)} = 0{,}04 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta_1 = 0{,}03 \\ \sqrt{\delta_2} = 0{,}05 \end{cases} \Rightarrow \frac{X_0^{(1)}}{X_0^{(2)}} = \frac{0{,}03 + 0{,}05}{0{,}04} = 2$$

Para dicha relación de tamaños iniciales se tendría una TB.

La **Figura 9**, muestra las variaciones de crecimiento entre la trayectoria balanceada del Ejemplo **B** y dos situaciones con relaciones de PBI inicial distintas. En principio lo evidente está, en que las diferencias entre los tamaños de las economías (tamaño relativo) pueden llegar tener un efecto diferente en el corto plazo para cada uno de estos países. Esto quiere decir que, o habrá una trayectoria asintótica balanceada o será balanceada a todo tiempo. Lo seguro es que, en el largo plazo, será balanceada.

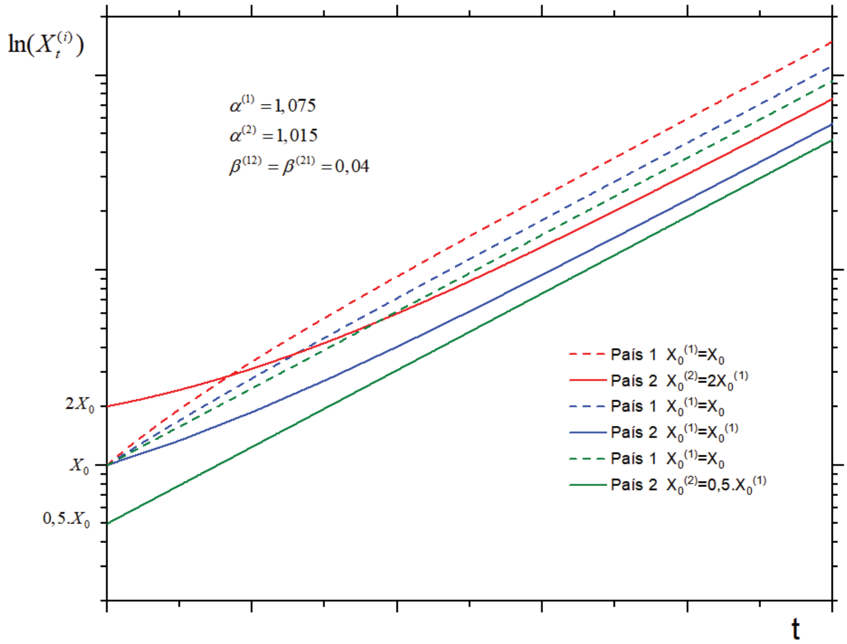


Figura 9 – Comparación de crecimiento balanceado y no balanceado según $X_0^{(1)} / X_0^{(2)}$ -

Si ahora:

$$\begin{cases} \alpha^{(1)} = 1{,}075 \\ \alpha^{(2)} = 1{,}015 \\ \beta^{(12)} = 0{,}04 \quad \beta^{(21)} = 0{,}08 \\ \dfrac{X_0^{(1)}}{X_0^{(2)}} = 2 \end{cases} \Rightarrow \frac{X_0^{(1)}}{X_0^{(2)}}\beta^{(21)} - \frac{X_0^{(2)}}{X_0^{(1)}}\beta^{(12)} > \alpha^{(1)} - \alpha^{(2)} \Rightarrow 0{,}14 > 0{,}06$$

resulta que la brecha entre los PBI disminuye asintóticamente. Y si

$$\begin{cases} \alpha^{(1)} = 1{,}075 \\ \alpha^{(2)} = 1{,}015 \\ \beta^{(12)} = 0{,}04 \quad \beta^{(21)} = 0{,}02 \\ \dfrac{X_0^{(1)}}{X_0^{(2)}} = 2 \end{cases} \Rightarrow \frac{X_0^{(1)}}{X_0^{(2)}}\beta^{(21)} - \frac{X_0^{(2)}}{X_0^{(1)}}\beta^{(12)} > \alpha^{(1)} - \alpha^{(2)} \Rightarrow 0{,}02 \not> 0{,}06$$

la brecha aumenta.

Las tres situaciones se muestran en la **Figura 10**. En este ejemplo, se ve que el país de menor PBI inicial y menor tasa de crecimiento propia puede crecer fuertemente disminuyendo la brecha, al aumentar la tasa de intercambio.

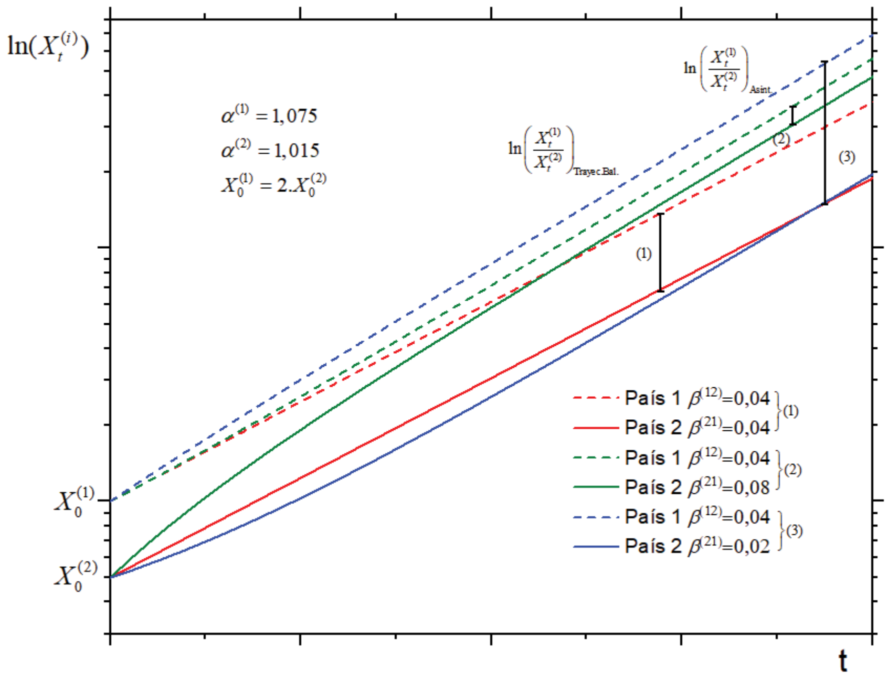


Figura 10 – Comparación de un crecimiento asintótico y un crecimiento balanceado -

***Conclusión 12***: Los estados asintóticos pueden dar lugar a mayor o menor desigualdad en el PBI que las trayectorias balanceadas según sea

$$\frac{\frac{X_0^{(1)}}{X_0^{(2)}}\beta^{(21)}-\frac{X_0^{(2)}}{X_0^{(1)}}\beta^{(12)}}{\alpha^{(1)}-\alpha^{(2)}}\begin{cases}>1\Rightarrow\left(\frac{X_t^{(1)}}{X_t^{(2)}}\right)_{\text{Asint.}}<\frac{X_0^{(1)}}{X_0^{(2)}}\\=1\Rightarrow\left(\frac{X_t^{(1)}}{X_t^{(2)}}\right)_{\text{Asint.}}=\frac{X_t^{(1)}}{X_t^{(2)}}\ \forall t\ \text{BALANCEADA}\\<1\Rightarrow\left(\frac{X_t^{(1)}}{X_t^{(2)}}\right)_{\text{Asint.}}>\frac{X_0^{(1)}}{X_0^{(2)}}\end{cases}\tag{39}$$

Por otro lado, en la **Figura 11** se muestra la comparación de la relación de PBI de ambos países $X_t^{(1)}/X_t^{(2)}$ para una trayectoria balanceada y trayectorias cercanas debida a cambios en los parámetros $\beta^{(12)}$ , $\beta^{(21)}$ y $\delta_1$ . Estas variaciones responden a lo hallado en las ecuaciones (30).

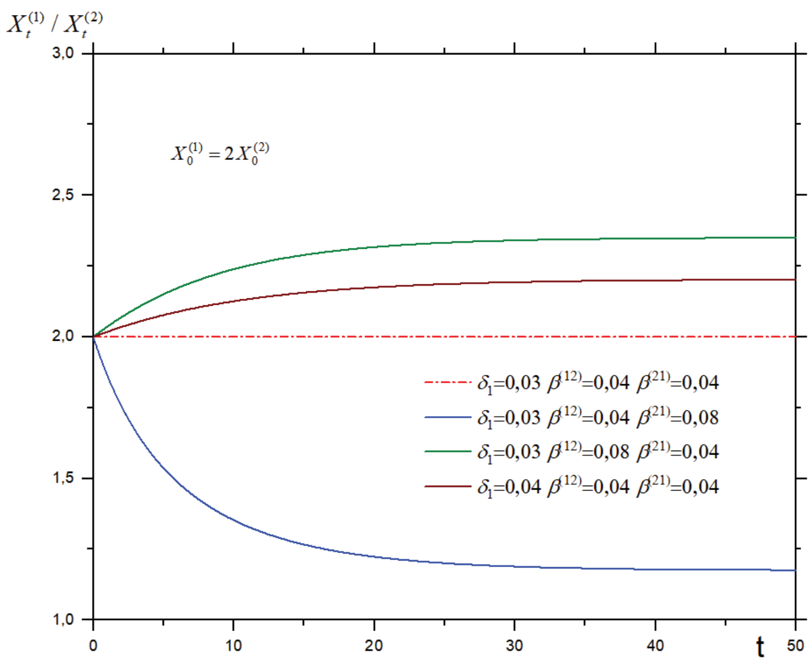


Figura 11 – Comparación $X_t^{(1)}/X_t^{(2)}$ para distintos conjuntos de parámetros -

## **6.8** <u>Condiciones para la existencia de Trayectorias Balanceadas</u>

Cabe preguntarse entonces, en qué condiciones se pueden dar estas trayectorias balanceadas.

Si se supone que las tasas de intercambio, $\beta^{(12)}$ y $\beta^{(21)}$, tienen valores **máximos** posibles $\beta_0^{(12)}$ y $\beta_0^{(21)}$, respectivamente. Podría pensarse como que los valores de ellas sean fijados por el intercambio comercial, y los máximos por una limitación estructural de las economías. Es decir, existe cierta frontera potencial que limita el intercambio. A saber, una economía no puede crecer utilizando toda la economía del otro país. Es decir, estos $\beta$ tienen un tope máximo. Por ejemplo, en la realidad el mercado interno para una economía, resulta fundamental para el crecimiento. En general, abastecer este mercado interno puede resultar prioritario. Esto, podría ser un factor determinante del tope máximo de intercambio, o por otro lado podría tratarse también de factores estructurales que limiten el potencial productivo como ser la capacidad instalada, el pleno uso de los factores, etc. Entonces, se plantea que el sistema en sí, tiene ciertas restricciones que cumplir. Así, de (34) y lo expuesto anteriormente, se establecen las restricciones para la existencia de estados balanceados:

$$\begin{cases} \dfrac{X_0^{(1)}}{X_0^{(2)}}\beta^{(21)} - \dfrac{X_0^{(2)}}{X_0^{(1)}}\beta^{(12)} = \alpha^{(1)} - \alpha^{(2)} \\ \beta^{(21)} \le \beta_0^{(21)} < 1, \beta^{(12)} \le \beta_0^{(12)} < 1 \end{cases} \tag{40}$$

Gráficamente esto se puede ver en la **Figura 12** – pagina siguiente-. Obsérvese que el grafico refleja lo planteado en **(40)**, los $\beta_0$ delimitan el área factible que garantiza una trayectoria de optimo balanceado para ambas economías. A su vez, estos $\beta_0$ se encuentran por debajo de 1 debido a lo discutido anteriormente. Más adelante, se verá, que este problema que se plantea puede ser resuelto mediante técnicas de optimización con restricciones de desigualdad, para dar con soluciones que se encuentren dentro de un conjunto factible. En otras palabras, que esta solución sea económicamente posible.

- ***Conclusión 13***: La posibilidad de estados balanceados depende de las relaciones entre los estados iniciales, tasas de crecimiento propias y valores máximos de intercambio.

$$\begin{cases} \dfrac{X_0^{(2)}}{X_0^{(1)}}\left(\alpha^{(1)} - \alpha^{(2)}\right) < \beta^{(21)} \le \beta_0^{(21)} \quad \text{(a)} \\ \dfrac{X_0^{(1)}}{X_0^{(2)}}\left(\alpha^{(2)} - \alpha^{(1)}\right) < \beta^{(12)} \le \beta_0^{(12)} \quad \text{(b)} \end{cases} \tag{41}$$

Lo relevante aquí, es que, si el lado izquierdo de la desigualdad es mayor que los $\beta$, o sea que la desigualdad no se cumpla, entonces no habrá trayectoria balanceada. En conclusión, si hay un país que económicamente es mucho más grande que el otro inicialmente, y la tasa de intercambio **no** es lo suficientemente grande, no existirá una trayectoria de crecimiento balanceado. De igual manera, tampoco será posible, si las tasas de crecimiento propias son demasiado diferentes.

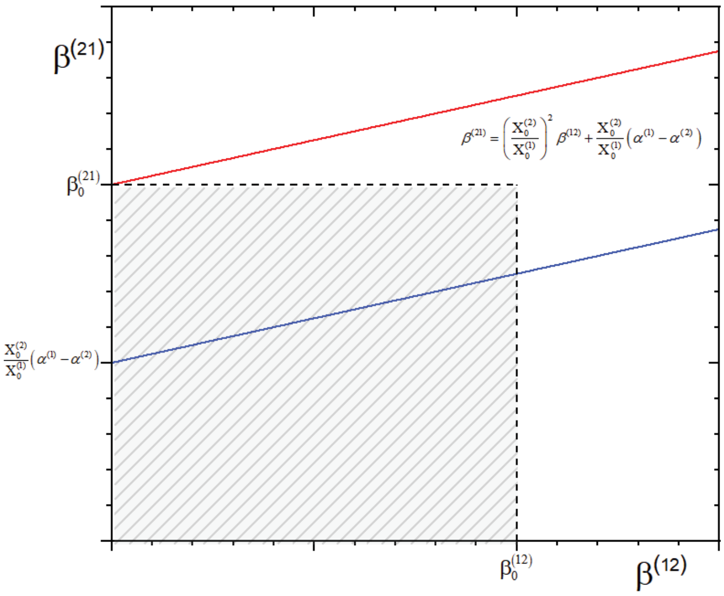


Figura 12 – Trayectorias de Estados Balanceados -

En resumen, $\beta$ es un factor que indica cómo impacta el tamaño o una economía en el crecimiento de la otra. Si este coeficiente, no es lo suficientemente grande, las diferencias entre los tamaños relativos de las economías, o las diferencias de tasa de crecimiento propias, hacen que no puedan crecer balanceadamente. En otras palabras, para que haya una trayectoria de crecimiento balanceado, el intercambio tiene que ser bastante fuerte como para que las diferencias entre tasas de crecimiento propias y tamaños relativos no interfieran.

En resumidas cuentas, si existieran dos países que podrían ser grandes socios estratégicos, pero no pueden colaborar lo suficiente, entonces no existirá tal crecimiento balanceado.

Un ejemplo de existencia: Según el Ejemplo A

$$\begin{cases} \alpha^{(1)} = 1{,}075 \\ \alpha^{(2)} = 1{,}015 \\ \beta^{(12)} = \beta^{(21)} = 0{,}04 \end{cases} \Rightarrow \frac{X_0^{(2)}}{X_0^{(1)}} = 0{,}5 \Rightarrow \begin{cases} 0{,}03 \le 0{,}04 \le \beta_0^{(21)} \\ -0{,}12 \le 0{,}04 \le \beta_0^{(12)} \end{cases}$$

**6.9** Tasas de crecimiento

Se definen las **tasas de crecimiento** como la proporción entre el PBI de un periodo respecto al anterior:

$$\gamma_t^{(i)} = \frac{X_{t+1}^{(i)}}{X_t^{(i)}} \quad / \quad i = 1 \vee 2 \tag{42}$$

Así, para ambos países se tiene

$$X_{t+1}^{(i)} = \alpha^{(i)} X_t^{(i)} + \beta^{(ij)} X_t^{(j)} \Rightarrow \gamma_t^{(i)} = \frac{X_{t+1}^{(i)}}{X_t^{(i)}} = \alpha^{(i)} + \beta^{(ij)} \frac{X_t^{(j)}}{X_t^{(i)}} \quad / \quad i, j = 1 \vee 2, i \neq j \tag{43}$$

Se puede observar que las tasas de crecimiento, dependen de las tasas de crecimiento propias y las de intercambio, junto con el tamaño relativo entre las economías de intercambio.

La **Figura 13**, muestra las tasas de crecimiento para distintas tasas de intercambio, dados los tamaños iniciales de las economías y las tasas propias.

De aquí surge la cuestión de estudiar, si dada la existencia de crecimiento balanceado, estas trayectorias se corresponden con una situación beneficiosa para el conjunto de países.

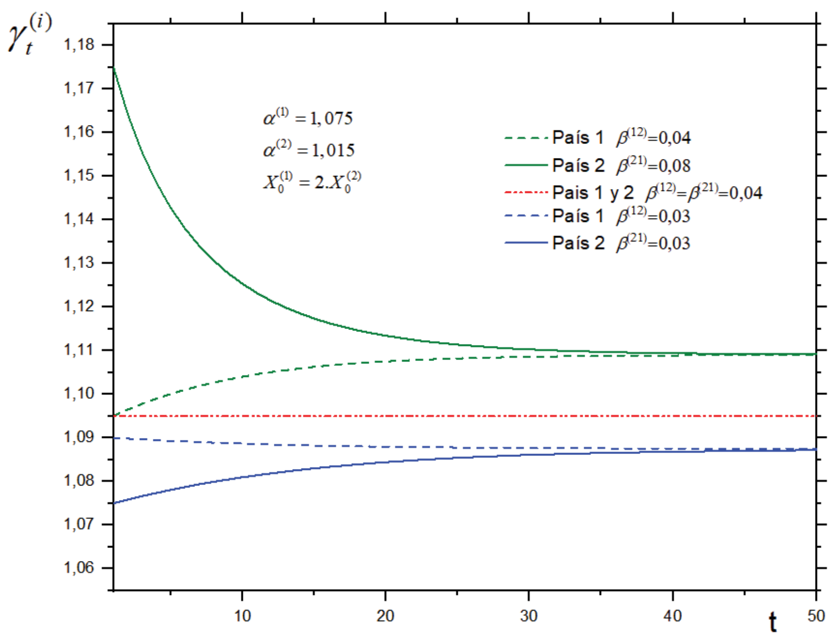


Figura 13 – Tasas de crecimiento en distintos escenarios -

**6.10** Crecimiento balanceado y óptimo de Pareto

Cualquier variación relativa entre los PBI en el tiempo hará que una tasa de crecimiento aumente y la otra disminuya, **a menos** que se encuentre en un autoestado económicamente viable, es decir en una trayectoria balanceada, de (36):

$$X_t^{(i)} = \lambda_2^t X_0^{(i)} \tag{44}$$

Así, de (43) y (44) resulta

$$\begin{cases} \gamma_t^{(1)} = \alpha^{(1)} + \beta^{(12)} \dfrac{X_0^{(2)}}{X_0^{(1)}} = \alpha^{(1)} + \beta^{(12)} = \lambda_2 \\ \gamma_t^{(2)} = \alpha^{(2)} + \beta^{(21)} \dfrac{X_0^{(1)}}{X_0^{(2)}} = \alpha^{(2)} + \beta^{(21)} = \lambda_2 \end{cases} \tag{45}$$

Por lo tanto, cuando se está en una senda de crecimiento balanceado, la tasa de crecimiento total, $\gamma_t$, es igual al autovalor.

- ***Conclusión 13***: Una trayectoria de crecimiento balanceado **es un óptimo de Pareto** para las tasas de crecimiento.

**6.11** Estática comparativa en una trayectoria de crecimiento balanceado

Si hay cambios en las tasas de crecimiento, para mantener una trayectoria de crecimiento balaceado se tendrá de (34) que pequeños cambios deberán compensarse tal que

$$\frac{X_0^{(1)}}{X_0^{(2)}} d\beta^{(21)} - \frac{X_0^{(2)}}{X_0^{(1)}} d\beta^{(12)} = d\alpha^{(1)} - d\alpha^{(2)} \tag{45}$$

Así, entre otras consecuencias

- Si las tasas de intercambio permanecen iguales, las propias tienen que variar en la misma cantidad.
- Si las tasas propias permanecen iguales, las de intercambio deben variar en el mismo sentido y en la proporción dada por (45)

**6.12** Crecimiento balanceado óptimo

Dadas estas trayectorias balanceadas, puede plantearse el problema de la existencia de una óptima. Esto requerirá maximizar la tasa de crecimiento $\lambda_2$, **dadas** las tasas propias, en función de las tasas de intercambio. Así, queda planteado el siguiente problema:

$$\begin{cases} Max\ \lambda_2\left(\beta^{(12)},\beta^{(21)}\right) \\ con \begin{cases} \dfrac{X_0^{(1)}}{X_0^{(2)}}\beta^{(21)} - \dfrac{X_0^{(2)}}{X_0^{(1)}}\beta^{(12)} = \alpha^{(1)} - \alpha^{(2)} \\ \beta^{(12)},\beta^{(21)} \le \beta_0 \le 1 \end{cases} \\ \beta^{(12)},\beta^{(21)} \ge 0 \end{cases} \quad (46)$$

Maximizar $\lambda_2$ es equivalente a maximizar el producto $\beta^{(12)} \cdot \beta^{(21)}$, dado que $\lambda_2$ es una función creciente de dicho producto. En resumen, ambas funciones son crecientes, por lo tanto cuando $\lambda_2$ es máximo, $\beta^{(12)} \cdot \beta^{(21)}$ también lo es.

En otras palabras, lo que se busca es, hallar las tasas de intercambio que maximicen la trayectoria balanceada. Estas tasas no son independientes una de otra, por lo que es necesario maximizar respecto a ambas, como se concluye de (46). Y si bien es un problema de optimización de Kuhn-Tucker, este caso se puede resolver fácilmente en forma gráfica. En el **apéndice B** se puede encontrar la demostración formal de esta equivalencia mediante la técnica de Kuhn-Tucker.

Por ejemplo, supóngase estar en los siguientes valores:

$$\begin{cases} \alpha^{(1)} = 1,1 \\ \alpha^{(2)} = 1,04 \\ \beta^{(12)} = \beta^{(21)} = 0,04 \end{cases} \Rightarrow \frac{X_0^{(2)}}{X_0^{(1)}} = 0,5 \Rightarrow \lambda_2 = 1,12 \quad (47)$$

Que **no** es un óptimo, como se puede ver de la **Figura 14**.

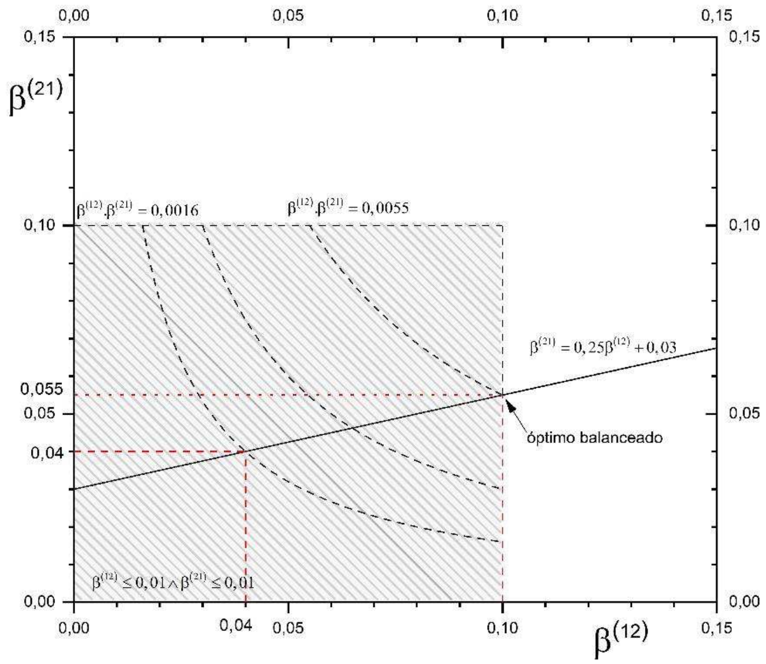


Figura 14 – Optimo de trayectoria balanceada -

Supóngase, por ejemplo, que los máximos valores de las constantes de intercambio sean $\beta^{(12)}, \beta^{(21)} \leq 0,1$. En la **figura 14**, puede verse que el óptimo balanceado se encuentra fácilmente sobre uno de los máximos de intercambio.

En dicha Figura, se pueden observar los $\beta_0$ que delimitan el área hasta 0,1 (restricción de c/u de las economías, en este ejemplo), y por otro lado, dentro de esta área las restricciones de menor o igual (región factible). A su vez, obsérvese, como la curva del producto constante se traslada hacia la frontera a medida que el producto crece. Los valores óptimos, son aquellos que cortan esta recta de crecimiento balanceado hasta la frontera. Por supuesto que más allá de esta frontera, se estaría excediendo las restricciones de desigualdad. O lo que es lo mismo, se estaría dentro de un conjunto **no factible**, y por lo tanto **no** se estaría en un óptimo balanceado. Sencillamente porque se estaría incurriendo en una situación ineficiente para alguna de las dos economías. Esto quiere decir, en otras palabras, que alguna de ellas o ambas, podrían haber encontrado un límite en sus $\beta_0$. Ya sea bien, por cuestiones de mercado interno, falta de capacidad productiva o problemas de productividad, u alguna otra limitante.

Sin embargo, claro está, existen posibilidades no solo de que haya existencia de una trayectoria balanceada, sino que también esta sea un óptimo balanceado.

En resumen, el óptimo se encontrará, entonces, recorriendo la recta hasta el valor máximo de alguna tasa de intercambio dentro de la región factible.

Entonces,

$$\begin{cases} Max\ \lambda_2\left(\beta^{(12)}, \beta^{(21)}\right) \equiv Max\left(\beta^{(12)}\beta^{(21)}\right) \\ con \begin{cases} 2\beta^{(21)} - 0,5\beta^{(12)} = 0,06 \Rightarrow \beta^{(21)} = 0,25\beta^{(12)} + 0,03 \\ \beta^{(12)}, \beta^{(21)} \leq 0,1 \end{cases} \\ \beta^{(12)}, \beta^{(21)} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \beta^{(12)} = 0,1 \Rightarrow \beta^{(21)} = 0,055, \lambda_2 = 1,15 \tag{48}$$

En este ejemplo con tasas de crecimiento propias de $\alpha_1 = 1,1$ y $\alpha_2 = 1,04$, y una relación de producto brutos internos de 2 a uno respectivamente, el óptimo balanceado se da para $\beta^{(12)} = 0,1$, $\beta^{(21)} = 0,055$ y $\lambda_2 = 1,15$ (nuevamente **Figura 14**).

En el siguiente esquema, **Figura 15** – Pagina siguiente –, se refleja un diagrama que plantea el intercambio óptimo para las dos economías.

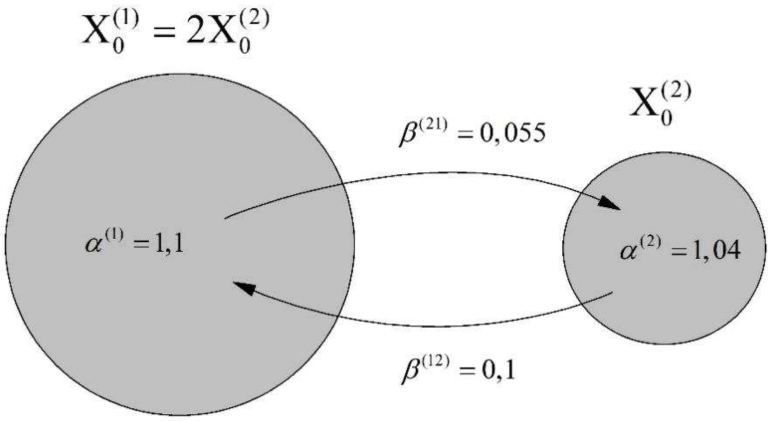


Figura 15 – Esquema del intercambio balanceado óptimo de las dos economías -

Pudiéndose así sacar las siguientes conclusiones -Ver **Apéndice B** para una demostración formal-.

- ***Conclusión 14***: Si son posibles estados balanceados -en las condiciones de (41)- existe un estado balanceado óptimo.

- ***Conclusión 15***: Los estados balanceados óptimos se dan sobre un máximo de tasa de intercambio -**de una de ellas o ambas**-.

## 7. Conclusiones finales

Entonces, conceptualmente, la dinámica depende de las diferencias de las tasas propias, del tamaño relativo de las economías y del producto de las tasas de intercambio. En otras palabras, este crecimiento balanceado depende, en principio, de la diferencia de una tasa con respecto de las otras, en el caso de las propias. De la diferencia de velocidad de crecimiento propio. Y del tamaño de las economías. O sea, hasta aquí, hay una competencia de diferencias. Pero, en el caso del intercambio, se potencia con el producto. En otras palabras, si estas economías actuaran de manera aislada independientemente una de la otra, o sea que, no hubiera intercambio, esto sería equivalente a decir que las $\beta$ fuesen cero. Entonces, la distancia entre uno y el otro estaría dada por la diferencia. En cambio, si aparece el intercambio, no es que aparece la diferencia, aparece el producto de los intercambios. La pregunta entonces es, cuando un producto es más grande. Cuando ambas tasas son más grandes, esto es obvio. En conclusión, a ambas economías le conviene intercambiar. Esto refleja el hecho de que el intercambio es bidireccional. El óptimo balanceado, o sea la mayor tasa de crecimiento balanceado, se va a dar cuando los dos países intercambien lo máximo que pueden intercambiar. Obviamente, como ya se mencionó, los $\beta$ tienen un límite, estos no pueden ser mayores que 1, ya que, de ser así, se estaría consumiendo todo de la otra economía. Es decir, como también ya se ha mencionado en otros párrafos, existen ciertos factores estructurales que limitan el conjunto factible para el intercambio comercial. Por otra parte, es importante volver a remarcar que bajo ningún punto de vista se está suponiendo que el comercio internacional sea el único factor condicionante para el crecimiento económico. Existen diversos factores – ver pag.8 y 45 - que interfieren o estimulan dichas tasas. Sin embargo, es importante entender que el comercio internacional, bajo determinadas condiciones, puede favorecer a ambas economías potenciando sus tasas de crecimiento a largo plazo.

Ahora cuales son las ventajas de exigir una trayectoria de crecimiento balanceado para el conjunto de países en el corto plazo, claramente esto no resulta de la matemática subyacente, sino de una conveniente estrategia entre socios comerciales que excede el crecimiento per se. En el corto plazo, se pueden observar ciertas diferencias según las $\alpha, \beta$ de c/u, que pueden llegar a diferir en el objetivo deseado para algunas de estas economías. Esto también, por supuesto, dependerá mucho de otros parámetros, no solo del tamaño de sus PBI. Pero, claramente puede suceder, que para una economía que ya se encuentre una posición suficientemente estable de crecimiento, esto sea difícil de comprender. Tal vez el argumento, en este caso, es más bien pensándolo en términos del óptimo socialmente deseable. Desde luego que, en esta situación, alguna economía pueda ver reducida la velocidad de crecimiento en el corto plazo (óptimo de Pareto), pero en el largo plazo todas las economías se verían beneficiadas en una senda de crecimiento balanceado. Generando economías de escala, y una sensación de confianza y optimismo de crecimiento a largo plazo, que desembocaría posiblemente en una ola subsecuente de inversiones producto de las expectativas. Se generarían, además, nuevos mercados para los mercados existentes. Como se mencionó en reiteradas ocasiones, todo esto obviamente, implica necesariamente que haya cierto acuerdo de intercambio entre los socios para lograr este objetivo común en el que todos se beneficien. En el largo plazo, claro está, todos crecerán a la misma tasa. Lo importante aquí, es destacar nuevamente que las economías que participen de esta planificación y coordinación, necesitan ser estratégicamente complementarias, esto les permitirá poder lograr un crecimiento a escala de todas ellas.

Por razones obvias, el caso de 2 países es una simplificación para términos prácticos de su demostración, pero para la economía real debería utilizarse un modelo como **(1)**. Esto es, contemplando todas las economías con quienes un país mantenga intercambios comerciales. En ese caso, un modelo como (1), reflejaría resultados bastante aproximados a la realidad. Todo esto siempre y cuando, como ya se discutió, se dé bajo ciertas condiciones necesarias. A saber, en principio en términos matemáticos se necesitan valores y vectores propios positivos que garanticen que el modelo adquiera sentido económico de crecimiento balanceado, cumpliendo principalmente los **teoremas de**

**Frobenius**, además de los supuestos de partida del modelo y sus determinadas restricciones.

Por otra parte, en términos económicos, se necesitan economías que sean muy complementarias entre sí, donde haya un alto grado de coordinación y planificación estratégica para lograr un impulso simultaneo – haciendo las veces de un modelo dinámico de Leontief multisectorial – para que se garantice un crecimiento balanceado en su conjunto. Esta planificación, a pesar de ser un gran desafío en términos políticos y sociales, podría generar un mensaje de optimismo o estímulo a las inversiones necesarias del sector privado, dadas las expectativas de crecimiento a largo plazo.

Entonces, con este modelo dinámico, es posible afirmar que este resultado podría contribuir no solo al debate sobre la eficacia del comercio internacional como una herramienta importante del motor de crecimiento, sino también a aquel debate que presenta al comercio internacional como un factor importante para garantizar tasas de crecimiento balanceado. Se recuerda del debate de crecimiento balanceado a autores como Paul N. Rosenstein-Rodan **(1943)**, quien aseguraba que el tamaño de la región era un punto importante para pensar en empresas de tamaño óptimo, y así poder minimizar los riesgos de la inversión. En otras palabras, cuando se evalúa el camino de la industrialización entre una instancia de aislamiento o una de integración con el mundo, esta última puede resultar más favorable y menos costosa. Esto es, pensar la complementariedad estratégica de la teoría de Nurske, pero en términos de comercio internacional. Desde luego se recuerda que, Rosenstein-Rodan no resuelve como coordinar la industrialización planeada a gran escala utilizando las ventajas internacionales. Se recuerda además que esto, es una condición necesaria. Esto efectivamente es un desafío bastante importante, imagine que para un estado en sí mismo, esto es a veces dificultoso de implementar. Parte de este desafío se puede definir en términos de Pigou: "*Resolver la ineficiencia del marco institucional por una desavenencia entre el costo privado y social*" **(Pigou, 1946)**. Por eso, pensar en un marco internacional, resulta ser más desafiante, pero no inviable. Claro está, que, en el corto plazo, pueden llegar a aparecer ciertas reticencias (políticas, sociales y económicas) a la idea de exigir esta planificación para lograr una trayectoria de crecimiento balanceado. Pero el resultado a largo plazo refleja una convergencia beneficiosa para el conjunto y el crecimiento a escala de las economías.

Tanto en lo visto en el debate de comercio internacional introductorio, como en el de crecimiento balanceado, se pueden encontrar posiciones opuestas respecto de los efectos del comercio internacional sobre la economía y las tasas de crecimiento. Lo importante aquí, es destacar que puede ser posible, bajo determinadas condiciones, generar un marco propicio que potencie el crecimiento y garantice trayectorias optimas de crecimiento balanceado para las economías que participen. En otras palabras, bajo este contexto, sería posible que las economías organizadas y planificadas estratégicamente, obtengan mejores resultados cooperando entre sí, que actuando de manera aislada.

## 8. Apéndice A – Teoremas de Frobenius

**Teorema n°1** -*teorema de Frobenius*- (la prueba de este teorema puede encontrarse en Akira Takayama **(1985)**):

Sea $A$ una matriz de n x n no negativa e indescomponible.

i. $A$ tiene un valor propio $\hat{\lambda} > 0$ tal que
ii. Un vector propio $\hat{x} > 0$ que puede asociarse con $\hat{\lambda}$.
iii. El vector propio $\hat{x}$ es único hasta un múltiplo escalar; es decir, si $\hat{y}$ es un vector propio asociado con $\hat{\lambda}$, entonces $\hat{y} = \theta \cdot \hat{x}$ para algún escalar positivo $\theta$.
iv. Si $A \cdot x = \mu \cdot x$ para algún $\mu \geq 0$ y $x \geq 0$, entonces $\mu = \hat{\lambda}$.
v. Si $\omega$ es un valor propio de $A$, entonces $|\omega| \leq \hat{\lambda}$.
vi. El valor propio $\hat{\lambda}$ se incrementa cuando cualquier elemento de $A$ aumenta; es decir, si $A_1 \geq A_2 \geq 0$ y $A_1, A_2$ son indescomponibles, entonces $\hat{\lambda}_{A_1} > \hat{\lambda}_{A_2}$, donde $\hat{\lambda}_{A_1}$ y $\hat{\lambda}_{A_2}$, respectivamente, denotan el $\hat{\lambda}$ asociado con $A_1, A_2$.
vii. El valor propio $\hat{\lambda}$ es una raíz simple.

**Definición**: La raíz $\hat{\lambda}$ en este teorema se suele denominar la **raíz de Frobenius de A**; esto se puede denotar como $\hat{\lambda}_A$.

**Teorema n°2** -*teorema de Frobenius*- (la prueba de este teorema puede encontrarse también en Akira Takayama **(1985)**):

Sea $A$ una matriz de n x n no negativa. Sea $B \equiv [\rho I - A]$, donde $\rho$ es un número real e $I$ es la matriz identidad. Entonces las siguientes 6 condiciones son mutuamente equivalentes.

i. Existe un $x \geq 0$ *tal que* $B \cdot x > 0$.
ii. Para cualquier $c \geq 0$, existe un $x \geq 0$ *tal que* $B \cdot x = c$.
iii. La matriz $B$ es no singular y $B^{-1} \geq 0$.
iv. Todos los sucesivos menores principales de $B$ son positivos.
v. La parte real de los autovalores de $B$ son positivos.
vi. Se tiene $\rho > \hat{\lambda}_A$, donde $\hat{\lambda}_A$ es la raíz de Frobenius de $A$.

Si, además, $A$ es indescomponible, entonces cualquiera de las anteriores condiciones es equivalente a las siguientes 2 condiciones:

vii. Existe un $x \geq 0$ *tal que* $B \cdot x > 0$
viii. La matriz $B$ es no singular y $B^{-1} > 0$.

## 9. Apéndice B – Optimo de las tasas de intercambio dentro de una trayectoria balaceada

Como se ha visto en el modelo de trabajo, se ha hallado el óptimo balanceado a través de un procedimiento gráfico, pero esto, a su vez, puede ser demostrado formalmente a través de la técnica de optimización de Kuhn-Tucker. En este apéndice, se realiza una demostración formal mediante esta técnica:

Se ha visto, además, que la posibilidad de estados balanceados depende de las relaciones entre los estados iniciales, tasas de crecimiento propias y valores máximos de intercambio. En otras palabras, si hay un país que es mucho más grande que el otro inicialmente, y la tasa de intercambio no es lo suficientemente grande, no existirá una trayectoria de crecimiento balanceado.

En principio, se da por **supuesto inicial,** que existe la trayectoria balanceada; por lo tanto, debe cumplirse, según **(25)** –y definiendo $x_0 = \frac{X_0^{(1)}}{X_0^{(2)}}$ -:

$$\begin{cases} \frac{2}{x_0}\delta_1 < \beta^{(21)} \leq \beta_0^{(21)} \quad (a) \\ -2x_0\delta_1 < \beta^{(12)} \leq \beta_0^{(12)} \ (b) \end{cases} \qquad \text{(B.1)}$$

Además, de **(B.1.a)**

$$\frac{2}{x_0}\delta_1 < \beta^{(21)} \Rightarrow \delta_1 < \frac{x_0}{2}\beta^{(21)} \Rightarrow \delta_1 < x_0\beta^{(21)} - \frac{x_0}{2}\beta^{(21)} \Rightarrow \delta_1 - x_0\beta^{(21)} < -\frac{x_0}{2}\beta^{(21)} < 0 \qquad \text{(B.2)}$$
$$\Rightarrow \delta_1 - x_0\beta^{(21)} < 0$$

Se plantea entonces el problema de maximización con sus restricciones correspondientes y las condiciones de no negatividad:

$$\begin{cases} Máx\ \lambda_2\left(\beta^{(12)},\beta^{(21)}\right) = \left(\frac{\alpha^{(1)}+\alpha^{(2)}}{2}\right) + \sqrt{\delta_1^2 + \beta^{(12)}\cdot\beta^{(21)}} \ (a) \\ con \begin{cases} \frac{X_0^{(1)}}{X_0^{(2)}}\beta^{(21)} - \frac{X_0^{(2)}}{X_0^{(1)}}\beta^{(12)} = \alpha^{(1)} - \alpha^{(2)} \Rightarrow x_0\beta^{(21)} - \frac{1}{x_0}\beta^{(12)} = 2\delta_1 \ (b) \\ \beta^{(12)} \leq \beta_0^{(12)},\ \beta^{(21)} \leq \beta_0^{(21)} (c) \end{cases} \\ \beta^{(12)}, \beta^{(21)} \geq 0 \end{cases} \qquad \text{(B.3)}$$

De **(B.3.b)**

$$x_0\beta^{(21)} - \frac{1}{x_0}\beta^{(12)} = 2\delta_1 \Rightarrow \beta^{(12)} = x_0^2\beta^{(21)} - 2x_0\delta_1 \qquad \text{(B.4)}$$

Y resulta

$$\sqrt{\delta_1^2+\beta^{(12)}\cdot\beta^{(21)}}=\sqrt{\delta_1^2+\left(x_0^2\beta^{(21)}-2x_0\delta_1\right)\cdot\beta^{(21)}}=\sqrt{\delta_1^2+x_0^2\left(\beta^{(21)}\right)^2-2x_0\delta_1\beta^{(21)}}=$$
$$=\sqrt{\left(\delta_1-x_0\beta^{(21)}\right)^2}=\left|\delta_1-x_0\beta^{(21)}\right|=-\left(\delta_1-x_0\beta^{(21)}\right)=x_0\beta^{(21)}-\delta_1=x_0\beta^{(21)}-\frac{\alpha^{(1)}-\alpha^{(2)}}{2} \quad \text{(B.5)}$$

Con lo cual, al reemplazar se elimina la restricción de igualdad y el problema resulta equivalente a:

$$\Rightarrow\begin{cases} Máx\ \lambda_2\left(\beta^{(21)}\right)=\alpha^{(2)}+x_0\beta^{(21)} \\ con\begin{cases} x_0^2\beta^{(21)}-2x_0\delta_1\le\beta_0^{(12)} \\ \beta^{(21)}\le\beta_0^{(21)} \end{cases} \\ \beta^{(21)}\ge 0 \end{cases} \quad \text{(B.6)}$$

Entonces, el problema de maximización será dado por el Lagrangeano

$$L(\beta^{(21)},\omega_1,\omega_2)=\alpha^{(2)}+x_0\beta^{(21)}-\omega_1\cdot\left(x_0^2\beta^{(21)}-2x_0\delta_1-\beta_0^{(12)}\right)-\omega_2\cdot\left(\beta^{(21)}-\beta_0^{(21)}\right) \quad \text{(B.7)}$$

y las condiciones necesarias de **Kuhn-Tucker**

$$\begin{array}{lll} \dfrac{\partial L}{\partial\beta^{(21)}}\le 0 & \beta^{(21)}\ge 0 & \beta^{(21)}\cdot\dfrac{\partial L}{\partial\beta^{(21)}}=0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial\omega_1}\ge 0 & \omega_1\ge 0 & \omega_1\cdot\dfrac{\partial L}{\partial\omega_1}=0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial\omega_2}\ge 0 & \omega_2\ge 0 & \omega_2\cdot\dfrac{\partial L}{\partial\omega_2}=0 \end{array} \quad \text{(B.8)}$$

Así, derivando, se tiene

$$\begin{array}{lll} x_0-x_0^2\cdot\omega_1-\omega_2\le 0\ (a) & \beta^{(21)}\ge 0\ (b) & \beta^{(21)}\cdot\left(x_0-x_0^2\cdot\omega_1-\omega_2\right)=0\ (c) \\ x_0^2\beta^{(21)}-2x_0\delta_1-\beta_0^{(12)}\le 0\ (d) & \omega_1\ge 0\ (e) & \omega_1\cdot\left(x_0^2\beta^{(21)}-2x_0\delta_1-\beta_0^{(12)}\right)=0\ (f) \\ \beta^{(21)}-\beta_0^{(21)}\le 0\ (g) & \omega_2\ge 0\ (h) & \omega_2\cdot\left(\beta^{(21)}-\beta_0^{(21)}\right)=0\ (i) \end{array} \quad \text{(B.9)}$$

Por otro lado, se sabe por **(B.3.c)** que $\beta^{(12)}\le\beta_0^{(12)}$ y reemplazando por **(B.4)** resulta

$$\beta^{(12)}\le\beta_0^{(12)}\Rightarrow x_0^2\beta^{(21)}-2x_0\delta_1\le\beta_0^{(12)}\Rightarrow x_0^2\beta^{(21)}-2x_0\delta_1-\beta_0^{(12)}\le 0$$

Es decir **(B.9.d)** se verifica siempre.

**<u>Caso 1</u>**: Si $x_0^2\beta^{(21)} - 2x_0\delta_1 - \beta_0^{(12)} < 0$

De **(B.9.f)** se tendrá que $\omega_1 = 0$ verificándose entonces **(B.9.d)**, **(B.9.e)** y **(B.9.f)**

$$\begin{array}{ccc} x_0 - \omega_2 \le 0 \ (a) & \beta^{(21)} \ge 0 \ (b) & \beta^{(21)} \cdot \left(x_0 - \omega_2\right) = 0 \ (c) \\ x_0^2\beta^{(21)} - 2x_0\delta_1 - \beta_0^{(12)} < 0 \ (\cancel{d}) & \omega_1 = 0 \ (\cancel{e}) & 0 = 0 \ (\cancel{f}) \\ \beta^{(21)} - \beta_0^{(21)} \le 0 \ (g) & \omega_2 \ge 0 \ (h) & \omega_2 \cdot \left(\beta^{(21)} - \beta_0^{(21)}\right) = 0 \ (i) \end{array} \qquad \text{(B.10)}$$

Si se supone $\omega_2 = 0$ resulta $x_0 \le 0$, absurdo, por lo tanto $\omega_2 \ne 0$; resultando en

$$\begin{array}{ccc} x_0 - \omega_2 = 0 \ (\cancel{a}) & \beta^{(21)} > 0 \ (\cancel{b}) & x_0 = \omega_2 \ (\cancel{c}) \\ x_0^2\beta^{(21)} - 2x_0\delta_1 - \beta_0^{(12)} < 0 \ (\cancel{d}) & \omega_1 = 0 \ (\cancel{e}) & 0 = 0 \ (\cancel{f}) \\ \beta^{(21)} - \beta_0^{(21)} = 0 \ (\cancel{g}) & \omega_2 > 0 \ (\cancel{h}) & \beta^{(21)} = \beta_0^{(21)} \ (\cancel{i}) \end{array} \qquad \text{(B.11)}$$

Así se tiene un máximo tal que (**Figura B.1**):

$$\begin{cases} \beta^{(12)} = x_0^2\beta_0^{(21)} - 2x_0\delta_1 < \beta_0^{(12)} \\ \beta^{(21)} = \beta_0^{(21)} \end{cases} \qquad \text{(B.12)}$$

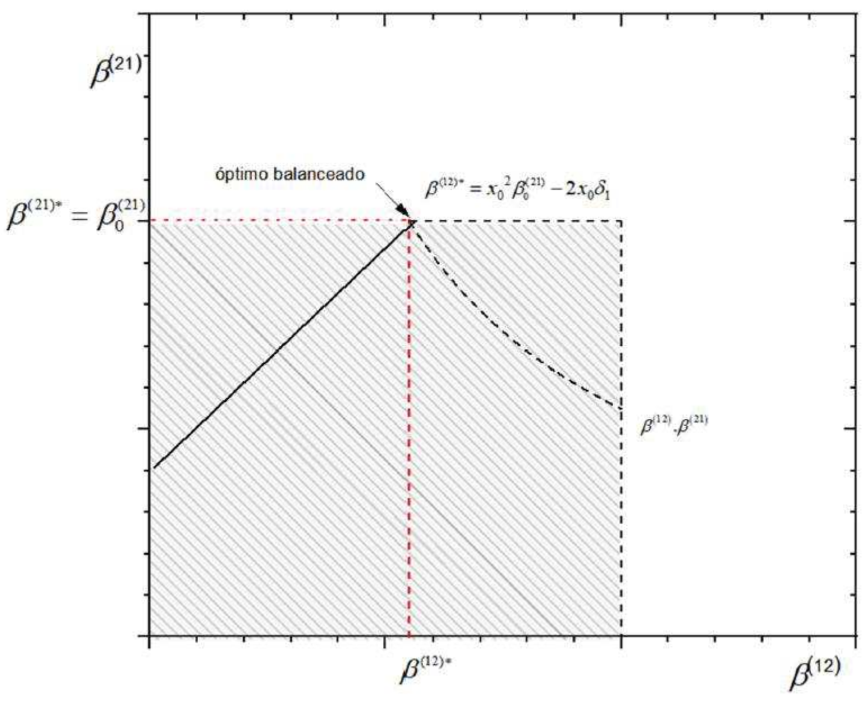


Figura B1 – Máximo para $x_0^2\beta^{(21)} - 2x_0\delta_1 - \beta_0^{(12)} < 0$ -

**<u>Caso 2</u>**: Si $x_0^2\beta^{(21)} - 2x_0\delta_1 - \beta_0^{(12)} = 0$ (B.13)

Entonces

$$x_0^2\beta^{(21)} - 2x_0\delta_1 - \beta_0^{(12)} = 0 \Rightarrow \beta^{(21)} = \frac{2}{x_0}\delta_1 + \frac{1}{x_0^2}\beta_0^{(12)}$$

Con $\beta^{(21)} \geq 0$ por **(B.3.b)**.

Además, de **(B.13)** y de **(B.4)** se tendrá también que $\beta^{(12)} = \beta_0^{(12)}$.

Así

$$\begin{cases} \beta^{(12)} = \beta_0^{(12)} \\ \beta^{(21)} = \dfrac{2}{x_0}\delta_1 + \dfrac{1}{x_0^2}\beta_0{}^{(12)} \end{cases} \quad \text{(B.14)}$$

Si $\beta^{(21)} < \beta_0^{(21)}$ (**Figura B.2**)

$$\begin{array}{lll} x_0 - x_0^2\cdot\omega_1 = 0\ (\cancel{a}) & \beta^{(21)} > 0\ (\cancel{b}) & x_0 - x_0^2\cdot\omega_1 = 0\ (\cancel{c}) \\ \beta^{(12)} - \beta_0^{(12)} = 0\ (\cancel{d}) & \omega_1 > 0\ (e) & \omega_1\cdot\left(\beta^{(12)} - \beta_0^{(12)}\right) = 0\ (\cancel{f}) \\ \beta^{(21)} - \beta_0^{(21)} < 0\ (\cancel{g}) & \omega_2 = 0\ (h) & \omega_2\cdot\left(\beta^{(21)} - \beta_0^{(21)}\right) = 0\ (\cancel{i}) \end{array} \quad \text{(B.15)}$$

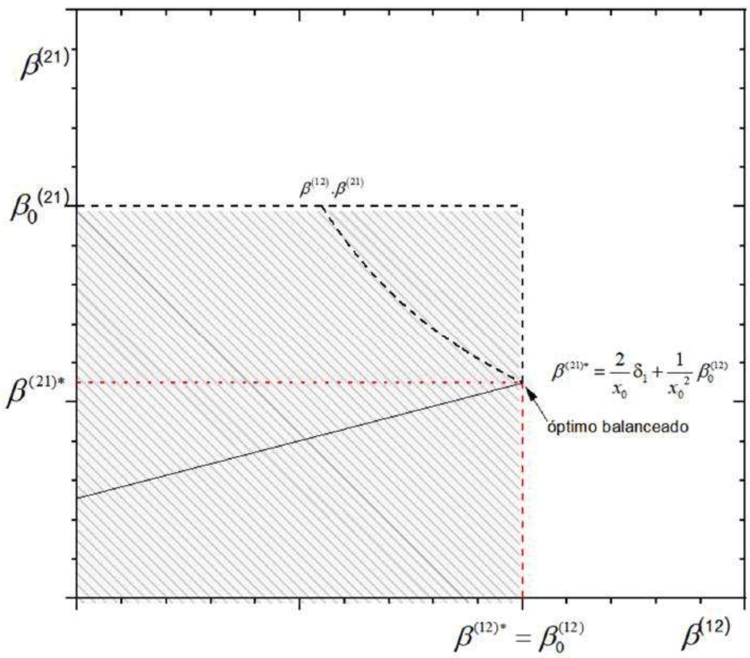


Figura B.2 – Máximo para $x_0^2\beta^{(21)} - 2x_0\delta_1 - \beta_0^{(12)} = 0$ y $\beta^{(21)} < \beta_0^{(21)}$ -

Y si, en particular, $\beta^{(21)} = \beta_0^{(21)}$ (**Figura B.3**), se tendrá $x_0^2\beta_0^{(21)} - \beta_0^{(12)} = 2x_0\delta_1$. Resulta entonces

$$\begin{cases} \beta^{(12)} = \beta_0^{(12)} \\ \beta^{(21)} = \beta_0^{(21)} \end{cases} \quad \text{(B.16)}$$

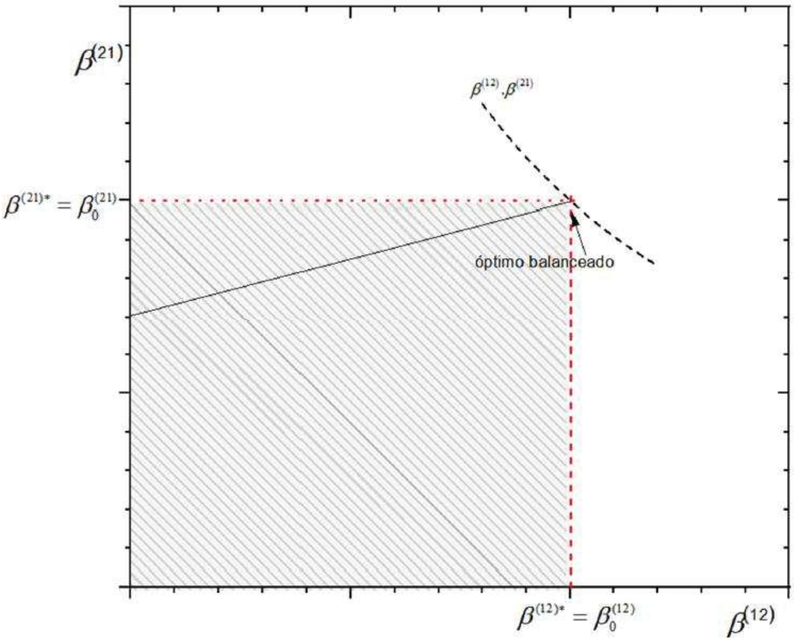


Figura B.3 – Máximo para $x_0^2\beta^{(21)} - 2x_0\delta_1 - \beta_0^{(12)} = 0$ y $\beta^{(21)} = \beta_0^{(21)}$ -

En resumen (**Figura B.4**):

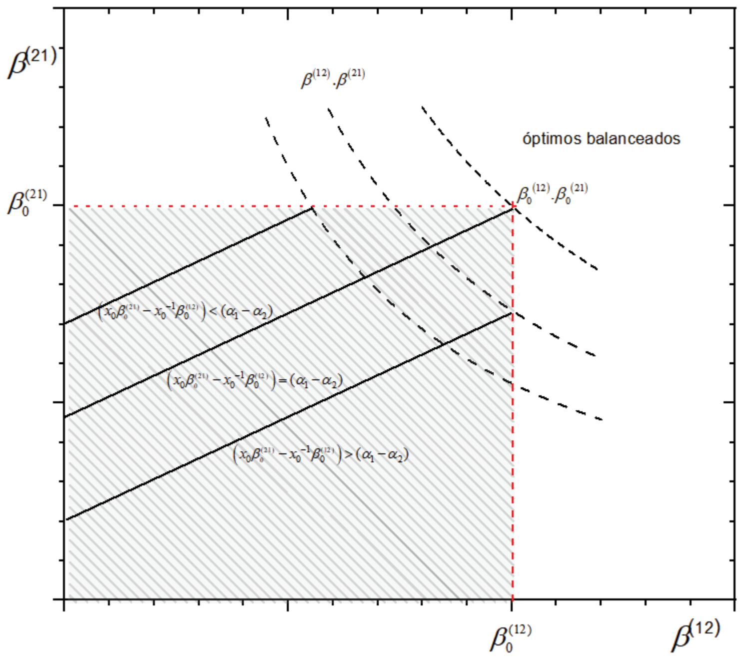


Figura B.4 - Óptimos balanceados para distintos conjuntos de parámetros -

| $\left(x_0\beta_0^{(21)} - x_0^{-1}\beta_0^{(12)}\right) - (\alpha_1 - \alpha_2)$ | $\beta^{(12)*}$ | $\beta^{(21)*}$ |
|---|---|---|
| $<0$ | $x_0^{2}\beta_0^{(21)} - 2x_0\delta_1$ | $\beta_0^{(21)}$ |
| $=0$ | $\beta_0^{(12)}$ | $\beta_0^{(21)}$ |
| $>0$ | $\beta_0^{(12)}$ | $2x_0^{-1}\delta_1 + x_0^{-2}\beta_0^{(12)}$ |

Así, finalmente, se puede observar que, si existe una trayectoria balanceada para ambas economías donde se intercambie lo máximo posible, se hallará un óptimo balanceado que se corresponderá con el máximo del producto de las tasas de intercambio de ambas economías. Además, los estados balanceados óptimos se dan sobre un máximo de tasa de intercambio -de una de ellas o ambas-.

## 10. Referencias bibliográficas

Nurske, R. (1954). Problemas de la formación de capital en los países subdesarrollados. *México DF: Fondo de Cultura Económica (FCE)*.

REVUELTA, J. I. El concepto de crecimiento equilibrado en el desarrollo económico: Teoría y práctica.

Young, A. A. (1928). Increasing returns and economic progress. *The economic journal*, *38*(152), 527-542.

Rosenstein-Rodan, P. N. (1943). Problems of industrialisation of eastern and south-eastern Europe. *The economic journal*, *53*(210/211), 202-211.

Pigou, A. C., & Aslanbeigui, N. (2017). *The economics of welfare*. Routledge.

Pastore, J. M. D. (1961). La Doctrina del" Crecimiento Balanceado" Sus Perspectivas en 1960. *Desarrollo Económico*, 5-57.

League of Nations. Economic, Financial, and Transit Department, & Hilgerdt, F. H. (1945). *Industrialization and foreign trade*. League of Nations.

Singer, H. W. (2012). The distribution of gains between investing and borrowing countries. In *Milestones and Turning Points in Development Thinking* (pp. 265-277). Palgrave Macmillan, London.

Prebisch, R. (1983). Cinco etapas de mi pensamiento sobre el desarrollo. *El trimestre económico*, *50*(198 (2), 1077-1096.

Rothbarth, Erwin, Causes of the Superior Effiency of the U.S.A. Industry Compared with the British Industry, "The Economic Journal", 1946

Scitovsky, T. (1954). Two concepts of external economies. *Journal of political Economy*, *62*(2), 143-151.

Dupuit, J. (1995). De la mesure de l'utilité des travaux publics (1844). *Revue française d'économie*, *10*(2), 55-94.

Furtado, C. (1953). La formación de capital y el desarrollo económico. *El Trimestre Económico*, *20*(77 (1), 88-121.

Lewis, W. A. (1955). The Theory of Economic Growth, Richard D. *Irwin, Homewood, IL*.

Fleming, M. (1955). External economies and the doctrine of balanced growth. *The Economic Journal*, *65*(258), 241-256.

Scitovsky, T. (1954). Two concepts of external economies. *Journal of political Economy*, *62*(2), 143-151.

Streeten, P. (1963). Crecimiento equilibrado versus crecimiento desequilibrado. *Desarrollo Económico*, 361-374.

Currie, L. Accelerating development: The necessity and the means, Nueva York, McGraw-Hill, 1966

Currie, L. (2018). The Big Push and balanced and unbalanced growth. *Revista de Economía Institucional*, *20*(39), 69-92.

Hirschman, A. O. Development projects observed, Washington DC, Brookings, 1967

Hirschman, A. O. "Review of Lauchlin Currie, Accelerating development", American Economic Review 57, 3, 1967

Hirschman, A. O. The strategy of economic development, New Haven, Yale University Press, 1958

Sandilands, R. (2015). La misión del Banco Mundial a Colombia de 1949, y las visiones opuestas de Lauchlin Currie y Albert Hirschman. *Revista de Economía Institucional*, *17*(32), 213-232.

Fernández-Baca, J., & Seinfeld, J. (1995). Capital humano, instituciones y crecimiento.

Takayama, A., & Akira, T. (1985). *Mathematical economics*. Cambridge university press.

Harrod, R. F., "An Essay in Dynamic Theory," Economic Journal, X LIX, March 1939

Harrod, R. F. (1959). Domar and dynamic economics. *The economic journal*, *69*(275), 451-464.

von Neumann, J., "Uber ein okonomisches Gleichungs-System und eine Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes," in Ergebnisse eines Mathmatischen Kolloquiums, ed. by K. Menger, no. 8, 1 937 (tr. as "A Model of General Equilibrium," Review of Economic Studies, XIII, no. I, 1945-1 946).

Solow, R. M., and Samuelson, P. A., "Balanced Growth under Constant Returns to Scale," Econometrica, 21, July 1953

Tsukui, J., "On a Theorem of Relative Stability," International Economic Review, 2, May 1961

Solow, R. M. (1959). Competitive valuation in a dynamic input-output system. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 30-53.

Hicks, J. R., A Contribution to the Theory of the Trade Cycle, Oxford, Clarendon Press, 1950

Goodwin, R. M. (1982). The non-linear accelerator and the persistence of business cycles. In *Essays in Economic Dynamics* (pp. 80-98). Palgrave Macmillan, London.

Morishima, M., "A Dynamic Leontief System with Neo-Classical Production Function," chap. III in his Equilibrium, Stability and Growth: A Multi-Sectoral Analysis, Oxford, Clarendon Press, 1 965 (a revision of his paper in Econometrica, 26, July 1 958.)

Walras, L., & Jaffé, W. (1954). *Elements of Pure Economics; Or,*. Pub. for.

Dorfman, R., Samuelson, P. A., & Solow, R. M. (1987). *Linear programming and economic analysis*. Courier Corporation.

Kuhn, H . W., "On a Theorem of Wald," i n *Linear Inequalities and Related Systems,* ed. by H . W. Kuhn and A. W. Tucker, Princeton, N.J., Princeton University Press, 1 956.

Gale, D. (1967). On optimal development in a multi-sector economy. *The Review of Economic Studies*, *34*(1), 1-18.

Alpha C. Chiang, & Wainwright, K. (2006). *Métodos fundamentales de economía matemática* (No. 330.11/Ch53fE/4a. ed.). McGraw-Hill.

Simon, C., & Blume, L. (2007). Mathematics for economics. In *Norton*.

Dávalos, J. E. K., & Lango, H. M. (2014). *Sistemas dinámicos discretos*. UNAM, Facultad de Ciencias.

Lomelí, H., & Rumbos, B. (2003). Métodos Dinámicos en Economía: Otra búsqueda del tiempo perdido. *Thomson Editorial. México*.

Alvear, J. S. (1993). *Sistemas Dinámicos Degenerados* (Doctoral dissertation, Departamento de Fısica, Facultad de Ciencia Joel Saavedra Alvear Licenciado en Fısica Aplicada, Universidad de Santiago de Chile).

Elaydi, Saber. (2005). An Introduction to Difference Equation. Springer.

Spivak, M. (2019). *Calculus*. Reverté.

Oliva, L. E. M., Rodríguez, J. C. A., Astudillo, R. J. P., & de la Cuadra, Y. M. E. (2020). Crecimiento económico y apertura comercial: Teoría, datos y evidencia (1960-2017). Revista de ciencias sociales, 26(4), 476-496.

Blanco, R. G. (2011). Diferentes teorías del comercio internacional. Ice, revista de economía, (858).

Jiménez, F. (1998). La nueva teoría del comercio internacional.