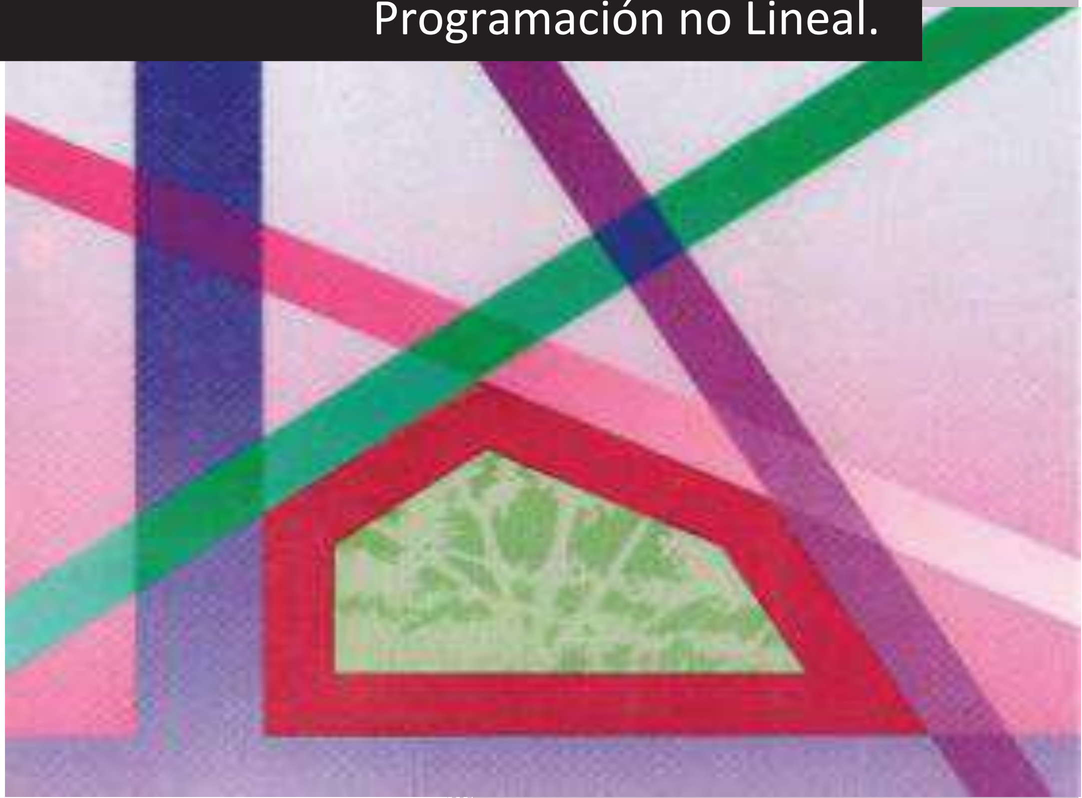
Universidad Nacional de San Martín

2020

Análisis Convexo en la Economía y su relación con la Programación no Lineal.



Yonathan Robledo

Robledo, Yonathan Ariel.
Licenciatura en Economía, EEyN UNSAM.

Tesista: Yonathan Ariel Robledo

Directores: Matías Fuentes, PhD

Corina Averbuj, PhD

Centro donde se realizó la tesina: Centro de Investigación en Economía Teórica y Matemática aplicada

Tesina para optar al grado de Licenciado en Economía por la Escuela de Economía y Negocios. Universidad Nacional de San Martín

Robledo, Yonathan Ariel.
Licenciatura en Economía, EEyN UNSAM.

Agradecimientos

Quiero agradecer a todas aquellas personas que hicieron posible la realización de este trabajo, tanto en aportes como en consejos y comentarios. En primer lugar voy a mencionar a mi padre Claudio Ariel Robledo por hacer posible que pueda estudiar en la universidad y por todo el sacrificio que ha realizado a lo largo de toda mi carrera y mi vida. A mi madre Vanesa Verónica Díaz por inculcarme el estudio universitario y mostrarme que es una mejor alternativa, así como a mi hermana Camila Milagros Robledo por el apoyo familiar y demás familiares. En segundo lugar agradezco a mis directores Matías Fuentes, PhD y Corina Averbuj, PhD por ser guías de este trabajo y de transmitirme sus conocimientos sobre microeconomía y matemáticas a lo largo de la carrera y por su alta exigencia que me permitió la realización de este trabajo. En tercer lugar doy gracias a Brian Becker, Evelyn Yangali y Diego Galligani por acompañarme en estos últimos años de la carrera, transitando las materias y momentos más difíciles junto con ellos, además de ser muy buenos compañeros y unidos. En cuarto lugar mencionaré al profesor Juan José María Martínez porque al ser exigente en la materia Algebra Lineal me dio la confianza suficiente y la fortaleza para enfrentar las materias más difíciles y seguir en la carrera, además de aumentar mi interés por la matemática. Por último queda mencionar a las directoras de mi escuela secundaria Myrna Ayala y Lourdes Alfieri por creer en mí y por siempre darme el apoyo emocional de seguir formándome.

Robledo, Yonathan Ariel.
Licenciatura en Economía, EEyN UNSAM.

Resumen

La optimización restringida sirve como base para la mayoría de los problemas económicos, que son formulados matemáticamente por una función objetivo f, sujeta a una función de restricción. Tal restricción puede ser de una o más variables, según la cantidad de variables que posea la función objetivo f, y si son restricciones de igualdad o de desigualdad. Las restricciones de igualdad se resuelven con los multiplicadores de Lagrange y las restricciones de desigualdad con las condiciones de Kuhn-Tucker, utilizando las condiciones necesarias mediante el uso de las derivadas de primer orden.

Las condiciones suficientes para la optimización utilizan derivadas de segundo orden, tomando como base la forma cuadrática de una función f y el cálculo matricial, mediante el uso de la matriz de segundas derivadas o la matriz del Hessiano Orlado. La definición de tales matrices determina si la función en estudio es cóncava o convexa, lo cual proporciona información si se trata de una función que tiene un máximo o un mínimo. Ambos tipos de programación, no lineal y cóncava, serán aplicados a un ejemplo integrador, con el fin de sacar conclusiones y visualizar todo lo comentado en cálculos matemáticos. Por último, los dos tipos de programación matemática, programación no lineal y la programación cóncava, se aplicaran en un modelo económico. El modelo económico estará basado en una empresa que debe ajustar su estructura de producción debido a factores exógenos que afectan a toda la economía en su conjunto.

Palabras clave

Kuhn-Tucker

Matriz segundas derivadas

Multiplicadores de Lagrange

Optimización

Programación Cóncava

Programación no Lineal

Índice general

Robledo, Yonathan Ariel.
Licenciatura en Economía, EEyN UNSAM.

Introducción general

¿Por qué optimizamos en Economía? La Optimización es uno de los ejes fundamentales de la economía, junto con el Equilibrio y el Empirismo. En economía optimizamos porque al ser una ciencia de elección, debemos asignar nuestros recursos escasos de la mejor manera posible, es decir elegir la mejor alternativa posible, con el fin de maximizar algo (Por ejemplo, la ganancia de una empresa, la utilidad de un consumidor o la tasa de crecimiento de una empresa o de la economía de un país) o de minimizar algo (Por ejemplo, el costo total de producción). Los problemas de maximización y los problemas de minimización son considerados como problemas de optimización.

En los problemas de optimización nuestro objetivo se formula matemáticamente mediante la función objetivo, en la que la variable dependiente es el objeto de maximización o minimización, y en la que el conjunto de variables independientes indica los objetos cuyas magnitudes económicas puede tomar y elegir la unidad económica en cuestión, con una visión a optimizar. Este conjunto de variables independientes que optimizan la función objetivo es hallado mediante técnicas matemáticas, utilizando el cálculo diferencial.

Como debemos maximizar o minimizar la función objetivo, matemáticamente esto es hallar sus valores extremos. Suponiendo que la función objetivo es diferenciable, los extremos se encuentras efectuando la derivada de la función objetivo con respecto a cada una de sus variables independientes e igualar a cero esas derivadas, luego hallar dichos valores de las variables independientes. Sin embargo, esto se realiza de esta forma cuando la función objetivo no está restringida por otras funciones, llamadas funciones de restricción. Por lo general, los problemas de optimización son restringidos, por ejemplo por una restricción presupuestaria, y estas restricciones pueden ser de igualdad o de desigualdad, habiendo una o varias. Si las restricciones son de igualdad, para optimizar la función objetivo se utiliza la técnica de los multiplicadores de Lagrange. Ahora bien, si las restricciones son de desigualdad, el proceso de optimización de la función objetivo para hallar los extremos es mediante la técnica de Kuhn-Tucker, que es una extensión de la técnica de Lagrange. Estas técnicas mencionadas pertenecen a una rama de la matemática llamada Programación matemática. Las programaciones más utilizadas en esta rama de la matemática son la Programación Lineal, la Programación no Lineal y la Programación Cóncava, entre otras. Entre la Programación no Lineal y la Programación Cóncava hay una relación, que es desarrollada utilizando el cálculo matricial y el cálculo diferencial.

Robledo, Yonathan Ariel.
Licenciatura en Economía, EEyN UNSAM.

Primera parte: Convexidad y Programación no Lineal.

En la primera parte se abordarán los conceptos de Programación No lineal y Programación Cóncava, explicando la relación entre ambos tipos de Programación. La programación no lineal tiene como base la optimización restringida. La optimización restringida utiliza cálculo diferencial para hallar la solución de un problema de maximización o de minimización, utilizando funciones no lineales para la función objetivo y para las funciones de restricción. El conjunto de restricciones del problema de optimización pueden ser relaciones de igualdad o de desigualdad. Cuando el conjunto de restricciones es de igualdades, se utilizan los multiplicadores de Lagrange, el cual es un procedimiento para encontrar los máximos y/o mínimos de funciones de varias variables sujetas a condiciones específicas o restricciones. Sin embargo, el método de multiplicadores de Lagrange puede modificarse para determinar óptimos de una función de varias variables sujeta a un conjunto de restricciones de desigualdad, algunas de las cuales pueden ser satisfechas como igualdades. Las condiciones necesarias, para que una solución sea óptima en un problema sujeto a una restricción de desigualdad se conocen como las condiciones de Kuhn-Tucker.

Por otro lado la Programación Cóncava utiliza el criterio de la segunda derivada, las condiciones suficientes de segundo orden, para definir si los puntos críticos hallados a partir de la optimización restringida corresponden a un máximo, a un mínimo o ninguno. La Programación Cóncava utiliza la definición de matrices simétricas por medio de los determinantes para clasificar como es el punto crítico en cuestión. Se estudia cómo es la concavidad de las funciones de restricción y de la función objetivo. La base de la Programación Cóncava son las formas cuadráticas y los conceptos de concavidad y convexidad.

Capítulo 1: Optimización restringida

1.1 Introducción a la optimización restringida

La economía se define a veces como el estudio de la asignación optima de recursos escasos. Cuando hablamos de óptimo estamos tratando un problema de optimización y cuando hablamos de escaso implica que los recursos en este problema de optimización no son libres de tomar cualquier valor. Por ejemplo, el consumo de un hogar está limitado por sus ingresos disponibles o la producción de una empresa está limitada por el costo y su disponibilidad de insumos y de trabajo, capital, los factores productivos. Es por este motivo que los problemas de optimización son fundamentales en la Teoría Económica. Estos problemas de optimización se formulan matemáticamente maximizando una función de varias variables, donde tales variables están limitadas por algunas ecuaciones de restricción.

Esta formulación matemática puede expresarse como

$$Maximizar\ f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Donde $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ está sujeto a las restricciones

$$g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_1, \dots, g_k(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_k$$

$$h_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1, \dots, h_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_m$$

La función f es la función objetivo, $g_1, g_2, \dots, g_k$ son las funciones de restricción de desigualdad y $h_1, h_2, \dots, h_m$ son las funciones de restricción de igualdad.

En las aplicaciones económicas, las variables independientes deberán ser no negativas, es decir $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$. Habrá restricciones de no negatividad.

<u>Ejemplos de optimización restringida</u>

<u>Ejemplo1.1.1: Problema de maximización de la utilidad</u>

El problema de optimización es

Maximizar $U(x_1, x_2, \dots, x_n)$

Sujeto a

$$p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n \leq B$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$$

Donde B es el ingreso (Presupuesto) y p_j es el precio del bien j.

<u>Ejemplo1.1.2: Problema de maximización de la utilidad con mano de obra</u>

El problema de optimización es

Maximizar $U(x_1, x_2, \dots, x_n)$

Sujeto a

$$p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n \leq B' + wl_0$$

$$l_0 + l_1 = 24$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$$

$$l_0 \geq 0, l_1 \geq 0$$

Donde $l_0$son las horas de trabajo, $l_1$son las horas de ocio, w es el salario, B'son ingresos no salariales y $B' + wl_0$ es el presupuesto.

Ejemplo1.1.3: Problema de maximización de beneficios de una empresa competitiva
Para este problema de maximización de beneficios de una empresa competitiva se tiene que

$x_1, x_2, \dots, x_n$ Son los insumos.

$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ Es la función de producción

p Es el precio de venta fijo de las cantidades producidas.

w_j Es el costo del insumo.

El problema de optimización es

Maximizar $pf(x_1, x_2, \dots, x_n) - \sum_{j=1}^{n} x_j\, w_j$

Sujeto a

$$pf(x_1, x_2, \dots, x_n) - \sum_{j=1}^{n} x_j\, w_j \geq 0$$

$$g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_1, \dots, g_k(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_k$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$$

Con g_i restricciones sobre la disponibilidad de los insumos.

Para hablar de optimización restringida se desarrollarán, en primer lugar, las restricciones de igualdad, partiendo del caso más simple de dos variables y una restricción de igualdad, dando importancia al motivo por el cual se utilizan las condiciones de cualificación para la optimización restringida. Luego se analizará el caso de más variables y restricciones al problema de optimización. Por último, se tratarán las restricciones de desigualdades tomando como base las restricciones de igualdad para llegar al tema de la programación no lineal y las condiciones de Kuhn Tucker, que es el centro de este trabajo.

1.2 Restricciones de igualdad

Las restricciones de igualdad sirven como base para la Programación no Lineal. Como se mencionó anteriormente, cuando el conjunto de restricciones es de igualdad, se utilizaran los multiplicadores de Lagrange. Partimos con el caso más simple de restricciones de igualdad, a saber, dos variables independientes y una restricción de igualdad.

Una restricción de igualdad con dos variables

El problema de optimización es

Maximizar $f(x_1, x_2)$

Sujeto a

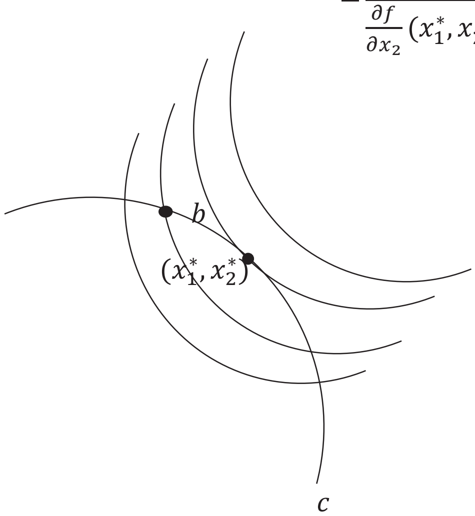
$$h(x_1, x_2) = c$$

Examinemos la solución geométrica de este problema de optimización ignorando que las variables x_1, x_2 sean no negativas.

Grafiquemos el conjunto de restricciones c en el plano $x_1 x_2$ acompañado de una muestra representada de las curvas de nivel de la función objetivo f continua. Geométricamente, el objetivo es encontrar la curva de nivel de valor más alta de f que cumpla con el conjunto de restricciones. El conjunto de nivel más alto de f debe tocar a c, de lo contrario debe estar en un lado de c. En otras palabras, que la curva de nivel más alta de f para tocar el conjunto de restricciones c debe ser tangente a c en el máximo restringido. Esto ocurre en el punto (x_1^*, x_2^*). Esta condición de tangencia significa que la pendiente del conjunto de niveles de f debe ser igual a la pendiente de la curva de restricción c en (x_1^*, x_2^*).

La pendiente del conjunto de niveles de f en (x_1^*, x_2^*) es

$$-\frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*)}{\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^*, x_2^*)}$$



En el máximo restringido (x_1^*, x_2^*), la curva de nivel más alta de f es tangente al conjunto de restricciones c. La pendiente del conjunto de restricciones $\{h(x_1, x_2) = c\}$ en (x_1^*, x_2^*) es

$$-\frac{\frac{\partial h}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*)}{\frac{\partial h}{\partial x_2}(x_1^*, x_2^*)}$$

Así, igualando se tiene

$$-\frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*)}{\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^*, x_2^*)} = -\frac{\frac{\partial h}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*)}{\frac{\partial h}{\partial x_2}(x_1^*, x_2^*)}$$

Cancelando los signos negativos

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*)}{\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^*, x_2^*)} = \frac{\frac{\partial h}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*)}{\frac{\partial h}{\partial x_2}(x_1^*, x_2^*)}$$

Reescribiendo esta ecuación como

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*)}{\frac{\partial h}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*)} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^*, x_2^*)}{\frac{\partial h}{\partial x_2}(x_1^*, x_2^*)}$$

μ Es el valor común de los cocientes anteriores (Para evitar trabajar con denominadores cero), así

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*)}{\frac{\partial h}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*)} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^*, x_2^*)}{\frac{\partial h}{\partial x_2}(x_1^*, x_2^*)} = \mu$$

En forma de sistema de ecuaciones, queda

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*) - \mu \dfrac{\partial h}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^*, x_2^*) - \mu \dfrac{\partial h}{\partial x_2}(x_1^*, x_2^*) = 0 \end{cases}$$

Hay tres incógnitas $x_1, x_2\ y\ \mu$ .Entonces se necesitan tres ecuaciones, o sea, se necesita una ecuación más dentro del sistema de ecuaciones. La tercera ecuación es la de la restricción $h(x_1, x_2) - c = 0$. Al incluir esta ecuación en el sistema de ecuaciones se tiene

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*) - \mu \dfrac{\partial h}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^*, x_2^*) - \mu \dfrac{\partial h}{\partial x_2}(x_1^*, x_2^*) = 0 \\ h(x_1, x_2) - c = 0. \end{cases}$$

Este sistema de ecuaciones se puede escribir de una forma más conveniente. Formando la función lagrangiana $L(x_1, x_2; \mu) = f(x_1, x_2) - \mu[h(x_1, x_2) - c]$

Al hacer las derivadas parciales de L con respecto a cada una de sus variables e igualarlas a cero, se obtiene el ultimo sistema de ecuaciones. Esta nueva variable μ es el multiplicador de Lagrange, la cual tiene un significado económico importante: Dará una nueva medida del valor de la escasez en el problema en cuestión.

Esta reducción del sistema de ecuaciones de plantear la función Lagrangiana, no hubiera sido posible si tanto $\frac{\partial L}{\partial x_1}, \frac{\partial L}{\partial x_2}$ fueran cero en el maximizador (x_1^*, x_2^*). Por esta razón, tenemos que suponer que $\frac{\partial h}{\partial x_2}, \frac{\partial h}{\partial x_2}$ sean distintas de cero en el máximo restringido (x_1^*, x_2^*). Esta restricción en el conjunto de restricciones es la calificación de la restricción. Si la restricción es lineal, como en los ejemplos 1.1.1 y 1.1.2, entonces la calificación de la restricción se cumple siempre. Dicho esto, podemos enunciar un teorema que abarca todo lo que comentado. La demostración de teorema se basará en los gráficos mostrados anteriormente.

Teorema 1.2.1

Sean f y g dos funciones $C^1(R^2)$ de dos variables. Suponga que (x_1^*, x_2^*) es una solución del problema

Maximizar $f(x_1, x_2)$

Sujeto a

$$h(x_1, x_2) = c$$

Supongamos además que (x_1^*, x_2^*) no es un punto crítico de h. Entonces, hay un número real μ^* tal que $(x_1^*, x_2^*; \mu^*)$ es el punto crítico de la función lagrangiana

$$L(x_1, x_2; \mu) = f(x_1, x_2) - \mu[h(x_1, x_2) - c]$$

En otras palabras, en $(x_1^*, x_2^*; \mu^*)$

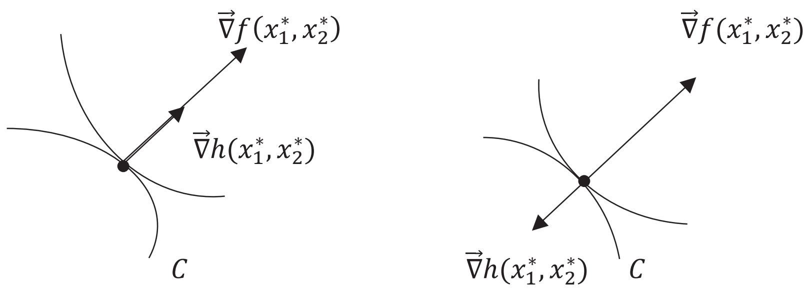
$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0, \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0, \frac{\partial L}{\partial \mu} = 0$$

Demostración

Las curvas de nivel de f y g son tangentes en (x_1^*, x_2^*) y, por lo tanto tienen igual pendiente. Si llamamos

$$\vec{\nabla} f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{pmatrix} \; y \; \vec{\nabla} h(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial x_1} & \frac{\partial h}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

Los vectores de desplazamiento en el punto (x_1^*, x_2^*) (Vectores gradiente). Los vectores son perpendiculares a los conjuntos de niveles de f y h respectivamente. Debido que los conjuntos de niveles de f y h tienen la misma pendiente en (x_1^*, x_2^*), los vectores de gradiente $\vec{\nabla} f(x_1, x_2)$ y $\vec{\nabla} h(x_1, x_2)$ deben alinearse en (x_1^*, x_2^*). Apuntan en la misma dirección o en direcciones opuestas. En cualquier caso, los gradientes son múltiplos escalares entre sí. Si escribimos el multiplicador como μ^*, entonces $\vec{\nabla} f(x_1^*, x_2^*) = \mu^* \vec{\nabla} h(x_1^*, x_2^*)$



$\vec{\nabla} h(x_1^*, x_2^*)$ Y $\vec{\nabla} f(x_1^*, x_2^*)$ alineados en la restricción maximizadora o minimizadora de (x_1^*, x_2^*). Por lo tanto esto es

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^*, x_2^*) \end{pmatrix} = \mu^* \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*) & \frac{\partial h}{\partial x_2}(x_1^*, x_2^*) \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*) - \mu^* \frac{\partial h}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^*, x_2^*) - \mu^* \frac{\partial h}{\partial x_2}(x_1^*, x_2^*) = 0 \end{cases}$$

■

Varias restricciones de igualdad con más de dos variables

Consideremos el problema de maximizar una función $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de n variables sujeta a más de una restricción de igualdad. Supongamos que hay m restricciones.

Las funciones $h_1(x_1, x_2, \dots, x_n), h_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, h_m(x_1, x_2, \dots, x_n)$ definen el conjunto de restricciones c_h. Así, el problema de optimización es

$Maximizar\ o\ minimizar\ f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

Sujeto a

$$c_h = \{(x_1, x_2, \dots, x_n)/h_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1, h_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_2, \dots, h_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_m\}$$

Generalizamos a las m funciones la calificación de restricción correspondiente a una función de dos variables

$$\left(\frac{\partial h}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*) \quad \frac{\partial h}{\partial x_2}(x_1^*, x_2^*)\right) \neq (0 \quad 0)$$

Para el caso de una restricción de igualdad y n variables, la calificación de restricción es

$$\left(\frac{\partial h}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \quad , \dots , \quad \frac{\partial h}{\partial x_n}(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)\right) \neq (0 \quad , \dots , \quad 0)$$

Donde alguna derivada parcial de h no sea cero en el punto $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$.

Para el caso genérico de n variables y m restricciones utilizamos la matriz Jacobiana de las funciones de restricción

$$Dh(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) & \frac{\partial h_1}{\partial x_2}(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) & \dots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n}(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \\ \frac{\partial h_2}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) & \frac{\partial h_2}{\partial x_2}(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) & \dots & \frac{\partial h_2}{\partial x_n}(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_m}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) & \frac{\partial h_m}{\partial x_2}(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) & \dots & \frac{\partial h_m}{\partial x_n}(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \end{pmatrix}$$

Definición 1.2.1

Sea $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ el punto crítico de $(h_1, h_2, \dots, h_m)$, si el rango de la matriz Jacobiana $Dh(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ es menor a m. Formalmente, decimos que $(h_1, h_2, \dots, h_m)$ satisface la calificación de restricción no degenerada en $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ si el rango de la matriz Jacobiana $Dh(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ es m. La calificación de restricción no degenerada implica que el conjunto de restricciones c_h tiene un plano tangente $n - m$ dimensional.

Teorema 1.2.2

Sean $f, h_1, h_2, \dots, h_m$ funciones $C^1(R^n)$ de n variables. Considere el problema de maximización (o minimización) de f en el conjunto de restricciones

$$c_h = \{(x_1, x_2, \dots, x_n)/h_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1, h_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_2, \dots, h_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_m\}$$

Supongamos que $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ pertenece al conjunto de restricciones c_h. Supongamos, además que $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ satsiface la calificación de la restricción no degenerada. Entonces, existe $\mu_1^*, \mu_2^*, \dots, \mu_m^*$ tal que $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*; \mu_1^*, \mu_2^*, \dots, \mu_m^*)$ es un punto crítico del lagrangiano.

$$L(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*; \mu_1^*, \mu_2^*, \dots, \mu_m^*) =$$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) - \mu_1[h_1(x_1, x_2, \dots, x_n) - c_1] - \mu_2[h_2(x_1, x_2, \dots, x_n) - c_2] - \cdots - \mu_m[h_m(x_1, x_2, \dots, x_n) - c_m]$$

En otras palabras

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*; \mu_1^*, \mu_2^*, \dots, \mu_m^*) = 0, \dots, \frac{\partial L}{\partial x_n}(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*; \mu_1^*, \mu_2^*, \dots, \mu_m^*) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu_1}(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*; \mu_1^*, \mu_2^*, \dots, \mu_m^*) = 0, \dots, \frac{\partial L}{\partial \mu_m}(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*; \mu_1^*, \mu_2^*, \dots, \mu_m^*) = 0$$

1.3 Restricciones de desigualdad

Al trabajar con conjuntos de restricciones definidos por restricciones de igualdad

$$c_h = \{(x_1, x_2, \dots, x_n)/h_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1, h_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_2, \dots, h_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_m\}$$

Para encontrar un máximo o mínimo de una función en un conjunto de restricciones de este tipo, construimos la función Lagrangiano y establecemos sus $n + m$ derivadas parciales iguales a cero, y luego resolvemos este sistema de ecuaciones.

Sin embargo, la gran mayoría de los problemas de optimización restringidos que surgen en la economía tienen sus limitaciones definidas por las desigualdades

$$g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_1, \dots, g_k(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_k$$

El método para encontrar los máximos restringidos en los problemas con restricciones de desigualdad es un poco más complejo que el método utilizado para las restricciones de igualdad. Las condiciones de primer orden involucran tanto la igualdad como la desigualdad, y su solución requiere la investigación de varios casos. Tal método utilizado para encontrar las soluciones en los problemas de optimización con restricciones de desigualdad son condiciones de Kuhn-Tucker, que trataremos en breve.

Condiciones de Kuhn-Tucker[i]

En la optimización restringida, además de las restricciones de desigualdad y de igualdad, se contempla como es la forma funcional de la función objetivo f y de las funciones de restricción g y h. En otras palabras, si f, g y h son funciones lineales o no lineales.

Si f, g y h son funciones no lineales, entraría en juego dentro de la optimización no restringida la programación no lineal. La programación no lineal permite manejar las restricciones de desigualdades y las funciones objetivos y de restricciones no lineales. Hay un tipo similar de condiciones de primer orden, como en el caso de las restricciones de igualdad y programación lineal, que son las condiciones de Kuhn-Tucker. Como se dijo al principio, en economía no hablamos de cantidades negativas, por lo tanto entraría en juego las restricciones de no negatividad. Las variables independientes no pueden ser negativas. Comencemos con un problema de maximización con restricciones de no negatividad y restricciones de desigualdad en el cual la función objetivo es una función diferenciable.

El problema de optimización es

$Maximizar\ f(x)$

Sujeto a

$x \geq 0$

Con la restricción $x \geq 0$ se tienen tres casos

<u>Caso 1</u>

Máximo local para $f(x)$ en el interior de la región factible (Solución interior)

La condición de primer orden es $\frac{df}{dx} = 0$

<u>Caso 2</u>

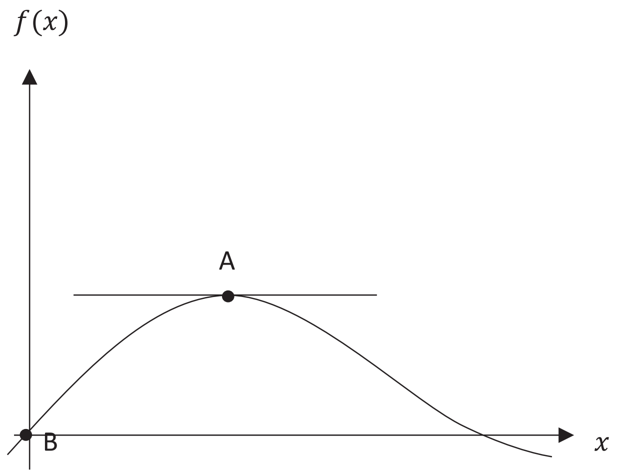
Máximo local para $f(x)$ en la columna vertical, para $x = 0$ (Solución de frontera)

La condición de primer orden es $\frac{df}{dx} = 0$

<u>Caso 3</u>

Máximo local para $f(x)$ en la columna vertical y que sea más alto que otros puntos.

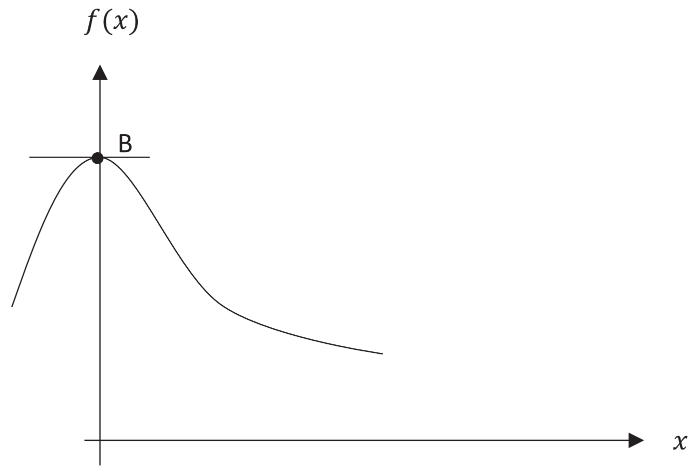
La condición de primer orden es $\frac{df}{dx} = 0$ v $\frac{df}{dx} = 0$



$\frac{df}{dx} = 0$

$x > 0$

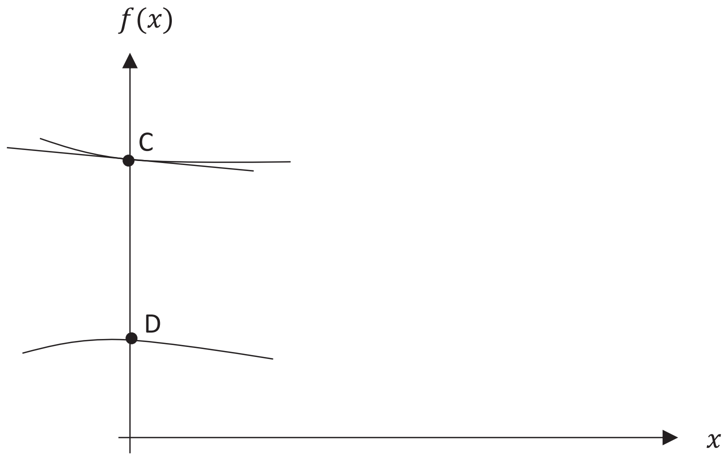
$Grafico$ 1.3.1



$$\frac{df}{dx} = 0$$

$$x = 0$$

$Gráfico$ 1.3.2



$$\frac{df}{dx} < 0$$

$$x = 0$$

$Gráfico$ 1.3.3

Al unir estas restricciones se obtiene

$$\frac{df}{dx} \leq 0\,, x \geq 0\,, x\frac{df}{dx} = 0$$

El término

$$x\frac{df}{dx} = 0$$

Es la holgura complementaria entre x y $\frac{df}{dx}$

Al agrupar se obtienen las condiciones de primer orden para un máximo local para el cual la variable de elección no puede ser negativa.

Para el caso de n variables, el problema de optimización es

$$Maximizar\ f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Sujeto a

$x_j \geq 0,$

Para todo $j = 1,2, \dots, n$

Tenemos los mismos 3 casos que antes, sólo que todas las variables de elección deben cumplirlos Así, tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} \leq 0 \, , x_j \geq 0 \, , x_j \frac{\partial f}{\partial x_j} = 0,$$

Para todo $j = 1,2, \dots, n$

A continuación, se desarrollará un problema de maximización de la utilidad con dos bienes x_1 y x_2, sujeto a una restricción presupuestaria con el fin de ilustrar estas condiciones de Kuhn-Tucker y dar una interpretación de lo que es la holgura complementaria. La forma funcional de la utilidad no está dada en el ejemplo (Ejemplo 1.3.1). En el Ejemplo 1.3.2, que es numérico, sí se dará la forma funcional de la función objetivo, la cual será no lineal.

Ejemplo 1.3.1
El problema de optimización es

$$Maximizar \; U(x_1, x_2)$$

Sujeto a

$$p_{x_1}x_1 + p_{x_2}x_2 \leq B$$

$$x_1 \geq 0 \, , x_2 \geq 0$$

La función Lagrangiana es

$$L = \; U(x_1, x_2) - \lambda[p_{x_1}x_1 + p_{x_2}x_2 - B]$$

Si se agrega que el consumidor ha racionado el articulo x_1 a $\bar{x}$, este se enfrentara a una segunda restricción.

El problema de optimización es

$$Maximizar \; U(x_1, x_2)$$

Sujeto a

$$p_{x_1}x_1 + p_{x_2}x_2 \leq B$$

$$x_1 \leq \bar{x}$$

$$x_1 \geq 0 \, , x_2 \geq 0$$

La función Lagrangiana es

$$L = U(x_1, x_2) - \lambda_1\left[p_{x_1}x_1 + p_{x_2}x_2 - B\right] - \lambda_2[x_1 - \bar{x}]$$

Las condiciones de Kuhn-Tucker son

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{\partial U}{\partial x_1} - \lambda_1 p_{x_1} - \lambda_2 \leq 0, x_1 \geq 0 \, , x_1 \left[\frac{\partial U}{\partial x_1} - \lambda_1 p_{x_1} - \lambda_2\right] = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = \frac{\partial U}{\partial x_2} - \lambda_1 p_{x_2} \leq 0\,,\, x_2 \geq 0\,,\, x_2\left[\frac{\partial U}{\partial x_2} - \lambda_1 p_{x_2}\right] = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = B - p_{x_1}x_1 - p_{x_2}x_2 \geq 0\,,\, \lambda_1 \geq 0, \lambda_1\left[B - p_{x_1}x_1 - p_{x_2}x_2\right] = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = \bar{x} - x_1 \geq 0\,,\, \lambda_2 \geq 0\,,\, \lambda_2[\bar{x} - x_1] = 0$$

La condición

$$\lambda_1\left[B - p_{x_1}x_1 - p_{x_2}x_2\right] = 0$$

Que es

$$\lambda_1 \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 0$$

La cual implica que

$$\lambda_1 = 0 \vee \; B - p_{x_1}x_1 - p_{x_2}x_2 = 0$$

Si interpretamos a λ_1 como la utilidad marginal del presupuesto y si la restricción del presupuesto es no activa (Que satisface una desigualdad en la solución) la utilidad marginal del presupuesto B debe ser cero $(\lambda_1 = 0)$

Por otro lado, la condición

$$\lambda_2[\bar{x} - x_1] = 0$$

Que es

$$\lambda_2 \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = 0$$

La cual implica que

$$\lambda_2 = 0 \vee \bar{x} - x_1 = 0$$

Si λ_2 lo interpretamos como la utilidad marginal de la relajación de la restricción, vemos que si la estricción por racionamiento no es activa, la utilidad marginal de la relajación de la restricción debe ser cero $(\lambda_2 = 0)$. Esta característica se denomina holgura complementaria, donde una de las dos desigualdades debe ser vinculante (Activa). Establecer el multiplicador de una restricción de desigualdad igual a cero hace que la función de restricción g salga del análisis del problema en cuestión. Esto es lo que queremos cuando la restricción no es activa (Que no satisface una desigualdad en la solución del problema). Si la restricción es vinculante, esto es $g(x_1, x_2) - b = 0$, el multiplicador de la restricción será mayor o igual a cero. Como no sabemos a priori si la restricción es activa, no se puede usar $g(x_1, x_2) - b = 0$. Así, la holgura complementaria me dice que o bien la restricción es vinculante o que su multiplicador es igual a cero. Con esto puedo enunciar el siguiente teorema antes de pasar al ejemplo numérico mencionado anteriormente.

Teorema 1.3.1
Suponga que f y g son funciones $C^1(R^2)$ y que $(x_1{}^*, x_2{}^*)$ maximiza f en el conjunto de restricciones $g(x_1, x_2) \leq b$

Si $g(x_1, x_2) = b$. Suponga que

$$\frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1{}^*, x_2{}^*) \neq 0 \vee \frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1{}^*, x_2{}^*) \neq 0$$

En ese caso, formando la función lagrangiana

$$L(x_1, x_2; \lambda) = f(x_1, x_2) - \lambda[g(x_1, x_2) - b]$$

Entonces, hay un multiplicador λ^* tal que

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}(x_1{}^*, x_2{}^*; \lambda^*) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2}(x_1{}^*, x_2{}^*; \lambda^*) = 0$$

$$\lambda^*[g(x_1{}^*, x_2{}^*) - b] = 0$$

$$\lambda^* \geq 0$$

$$g(x_1{}^*, x_2{}^*) \leq b$$

El siguiente ejemplo (Ejemplo 1.3.2) es como el Ejemplo 1.3.1 que trató sobre problema de maximización con racionamiento, pero con valores numéricos para los precios, el presupuesto y el $\bar{x}$.

Ejemplo 1.3.2: Versión numérica del ejemplo 1.3.1
El problema de optimización es

$$Maximizar\ U(x_1, x_2) = x_1 x_2$$

Sujeto a

$$x_1 + x_2 \leq 100$$

$$x_1 \leq 40$$

$$x_1 \geq 0\ , x_2 \geq 0$$

La función Lagrangiana es

$$L = x_1 x_2 - \lambda_1[x_1 + x_2 - 100] - \lambda_2[x_1 - 40]$$

Las condiciones de Kuhn-Tucker son

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = x_2 - \lambda_1 - \lambda_2 \leq 0\ , x_1 \geq 0\ , x_1[x_2 - \lambda_1 - \lambda_2] = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = x_1 - \lambda_1 \leq 0\ , x_2 \geq 0\ ; x_2[x_1 - \lambda_1] = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 100 - x_1 - x_2 \geq 0\,, \lambda_1 \geq 0\,, \lambda_1[100 - x_1 - x_2] = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = 40 - x_1 \geq 0\,, \lambda_2 \geq 0\,, \lambda_2[40 - x_1] = 0$$

Para resolver un problema de programación no lineal, dadas las condiciones de Kuhn-Tucker, buscamos las soluciones que verifiquen todas las restricciones. En caso contrario, ese punto crítico no será una solución de nuestro sistema. Por ejemplo, podemos permitir que una de variables de elección sea cero. Al hacer esto, se simplifican las condiciones marginales. Si pueden encontrarse valores no negativos de los multiplicadores de Lagrange que satisfagan todas las desigualdades marginales, la solución cero será la óptima.

Por otro lado, si la solución cero viola alguna de las desigualdades, entonces debemos permitir que una o más de las variables de elección sean positivas. Para cada una de las variables de elección positiva, podemos mediante la holgura complementaria, transformar una condición marginal de desigualdad débil en una igualdad estricta.

Si se resuelve adecuadamente, esta igualdad nos lleva, ya sea a una solución o a una contradicción, que nos obligara a intentar otra cosa.

Para el ejemplo numérico

Si $x_1 = 0 \vee x_2 = 0$ tenemos que $U = x_1 x_2 = 0$

Por lo tanto suponemos que x_1 y x_2 son diferentes de cero. Así

$$x_2 - \lambda_1 - \lambda_2 = x_1 - \lambda_1 = 0$$

O sea

$$\begin{cases} x_2 - \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ x_1 - \lambda_1 = 0 \end{cases}$$

Por lo tanto

$$x_2 - \lambda_2 = x_1$$

Si suponemos que la restricción por racionamiento es no activa, eso implica que

$$\lambda_2 = 0$$

Así tenemos

$$x_2 = x_1$$

Entonces, el presupuesto $B = 100$ da la solución

$$x_1 = x_2 = 50$$

Esta solución no cumple con la restricción de racionamiento

$$x_1 \leq 40$$

Así, tomamos la hipótesis alterna de que la restricción por racionamiento sea activa, que implica

$$\lambda_2 \neq 0$$

Con lo cual se obtiene

$$x_1 = 40$$

Y si $\lambda_1 \neq 0$ (suponemos que la restricción de presupuesto es activa) se tiene que

$$x_2 = 60$$

Que arroja un resultado de

$$\lambda_1 = 40 \wedge \lambda_2 = 60$$

Por la holgura complementaria

Así, la solución del problema es

$$Pc = (40{,}60{,}40{,}20)$$

Correspondiente a los valores de $x_1, x_2, \lambda_1\ y\ \lambda_2$respectivamente.

Hasta ahora analizamos casos con un número reducido de variables independientes y restricciones de desigualdad. Ahora planteamos el caso general de n variables con k restricciones de desigualdad.

Varias restricciones de desigualdad

La función Lagrangiana para un problema de maximización para el caso de n variables con k restricciones de desigualdad es

$$L = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i [g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) - b_i]$$

Las condiciones de Kuhn Tucker son

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} - \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \leq 0 \, , x_j \geq 0 \, , x_j \frac{\partial L}{\partial x_j} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = b_i - g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0 \, , \lambda_i \geq 0 \, , \lambda_i \frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = 0$$

Para todo $j = 1,2, \ldots, n$

Para todo $i = 1,2, \ldots, k$

Problemas de minimización y condiciones de Kuhn-Tucker

Los problemas de optimización en economía no siempre son de maximización de la utilidad y beneficios. Los agentes económicos pueden enfrentarse a un problema de minimizar los costos, riesgos, entre otros. En ese caso, si se quiere resolver un problema de minimización aplicando el método de Kuhn-Tucker hay dos formas de hacerlo. Aplicar la versión de minimización de Kuhn-Tucker o maximizando el opuesto de la función a minimizar.

Método 1

Aplicar la versión de minimización de las condiciones de Kuhn Tucker (Varias restricciones y varias variables)

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} - \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \geq 0 \, , x_j \geq 0 \, , x_j \frac{\partial L}{\partial x_j} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = b_i - g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0 \, , \lambda_i \geq 0 \, , \lambda_i \frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = 0$$

Para todo $j = 1,2, \dots, n$

Para todo $i = 1,2, \dots, k$

Método 2

Transformar el problema de minimización en un problema de maximización y luego aplicar el problema para la maximización. La transformación del problema es en base a que minimizar C (Función de costo) equivale a maximizar $-C$. Para eso se deben invertir las desigualdades de restricción multiplicando por -1.

Analicemos un problema minimización resolviéndolo por medio de estos dos métodos mencionadas anteriormente.

Ejemplo 1.3.3
El problema de optimización es

$$Minimizar\ C(x_1, x_2) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 4)^2$$

Sujeto a

$$2x_1 + 3x_2 \geq 6$$

$$-3x_1 - 2x_2 \geq -12$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Utilizamos la versión de las condiciones de Kuhn Tucker para un problema de minimización (Método 1)

La función Lagrangiana es

$$L = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 4)^2 - \lambda_1[2x_1 + 3x_2 - 6] - \lambda_2[-3x_1 - 2x_2 + 12]$$

Las condiciones de Kuhn-Tucker son

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 - 2\lambda_1 + 3\lambda_2 - 8 \geq 0 \, , \ x_1 \geq 0 \, , x_1[2x_1 - 2\lambda_1 + 3\lambda_2 - 8] = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2 - 3\lambda_1 + 2\lambda_2 - 8 \geq 0 \, , x_2 \geq 0 \, , x_2[2x_2 - 3\lambda_1 + 2\lambda_2 - 8] = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 6 - 2x_1 - 3x_2 \leq 0 \,, \lambda_1 \geq 0 \,, \lambda_1[6 - 2x_1 - 3x_2] = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = -12 + 3x_1 + 2x_2 \geq 0 \,, \lambda_2 \geq 0 \,, \lambda_2[-12 + 3x_1 + 2x_2] = 0$$

Si $x_1, x_2 > 0$

$$\begin{cases} 2x_1 - 2\lambda_1 + 3\lambda_2 - 8 = 0 \\ 2x_2 - 3\lambda_1 + 2\lambda_2 - 8 = 0 \end{cases}$$

Supongamos $\lambda_1, \lambda_2 > 0$

$$\begin{cases} 2x_1 - 2\lambda_1 + 3\lambda_2 - 8 = 0 \\ 2x_2 - 3\lambda_1 + 2\lambda_2 - 8 = 0 \\ 6 - 2x_1 - 3x_2 = 0 \\ -12 + 3x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$$

En forma matricial

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 2 \\ -2 & -3 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ -6 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Así

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24/5 \\ -6/5 \\ -172/25 \\ -128/25 \end{pmatrix}$$

$$Pc = (\frac{24}{5}, -\frac{6}{5}, -\frac{172}{25}, -\frac{128}{25})$$

No cumple con las condiciones de Kuhn-Tucker, ya los multiplicadores deben ser positivos al igual que las variables de elección.

Supongamos $\lambda_1 = 0 \,, \lambda_2 > 0$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3\lambda_2 - 8 = 0 \\ 2x_2 + 2\lambda_2 - 8 = 0 \\ -12 + 3x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$$

En forma matricial

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Así

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28/13 \\ 36/13 \\ 16/13 \end{pmatrix}$$

$$Pc = \left(\frac{28}{13}, \frac{36}{13}, 0, \frac{16}{13}\right)$$

Cumple las condiciones Kuhn-Tucker.

Supongamos $\lambda_1 > 0\,, \lambda_2 = 0$

$$\begin{cases} 2x_1 - 2\lambda_1 - 8 = 0 \\ 2x_2 - 3\lambda_1 - 8 = 0 \\ 6 - 2x_1 - 3x_2 = 0 \end{cases}$$

En forma matricial

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Así

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21/13 \\ 10/13 \\ -28/13 \end{pmatrix}$$

$$Pc = \left(\frac{24}{13}, \frac{10}{13}, -\frac{28}{13}, 0\right)$$

No cumple las condiciones Kuhn-Tucker, ya que los multiplicadores no son no negativos.

Supongamos $\lambda_1, \lambda_2 = 0$

$$\begin{cases} 2x_1 = 8 \\ 2x_2 = 8 \end{cases}$$

Así

$$Pc = (4{,}4{,}0{,}0)$$

Cumple las condiciones Kuhn-Tucker.

Por lo tanto, los puntos críticos que cumplen con las condiciones Kuhn-Tucker son

$$Pc = \left(\frac{28}{13}, \frac{36}{13}, 0, \frac{16}{13}\right)$$

$$Pc = (4{,}4{,}0{,}0)$$

Al evaluar la función objetivo C en cada uno de esos puntos y sabiendo que el objetivo es minimizar, se tiene que $Pc = (4{,}4{,}0{,}0)$ Es la solución del problema de minimización.

Utilizamos el método de maximizar $-C$, la función objetivo multiplicado por -1 (Método 2)

El problema de optimización es

$$Maximizar\ \ -C(x_1, x_2) = -(x_1 - 4)^2 - (x_2 - 4)^2$$

Sujeto a

$$-2x_1 - 3x_2 \leq -6$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 12$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

La función Lagrangiana es

$$L = -(x_1 - 4)^2 - (x_2 - 4)^2 - \lambda_1[6 - 2x_1 - 3x_2] - \lambda_2[-12 + 3x_1 + 2x_2]$$

Las condiciones de Kuhn-Tucker son

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -2x_1 + 2\lambda_1 - 3\lambda_2 + 8 \leq 0 \,, x_1 \geq 0 \,, x_1[-2x_1 + 2\lambda_1 - 3\lambda_2 + 8] = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = -2x_2 + 3\lambda_1 - 2\lambda_2 + 8 \leq 0 \,, x_2 \geq 0 \,, x_2[-2x_2 + 3\lambda_1 - 2\lambda_2 + 8] = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = -6 + 2x_1 + 3x_2 \geq 0 \,, \lambda_1 \geq 0 \,, \lambda_1[-6 + 2x_1 + 3x_2] = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = 12 - 3x_1 - 2x_2 \geq 0 \,, \lambda_2 \geq 0 \,, \lambda_2[12 - 3x_1 - 2x_2] = 0$$

Si $x_1, x_2 > 0$

$$\begin{cases} -2x_1 + 2\lambda_1 - 3\lambda_2 + 8 = 0 \\ -2x_2 + 3\lambda_1 - 2\lambda_2 + 8 = 0 \end{cases}$$

Supongamos $\lambda_1, \lambda_2 > 0$

$$\begin{cases} -2x_1 + 2\lambda_1 - 3\lambda_2 + 8 = 0 \\ -2x_2 + 3\lambda_1 - 2\lambda_2 + 8 = 0 \\ -6 + 2x_1 + 3x_2 = 0 \\ 12 - 3x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$$

En forma matricial

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Así

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24/5 \\ -6/5 \\ -172/25 \\ -128/25 \end{pmatrix}$$

$$Pc = (\frac{24}{5}, -\frac{6}{5}, -\frac{172}{25}, -\frac{128}{25})$$

No cumple con las condiciones de Kuhn-Tucker, ya los multiplicadores deben ser positivos al igual que las variables de elección.

Supongamos $\lambda_1 > 0\,, \lambda_2 = 0$

$$\begin{cases} 2x_1 - 2\lambda_1 = 8 \\ 2x_2 - 3\lambda_1 = 8 \\ 2x_1 + 3x_2 = 6 \end{cases}$$

En forma matricial

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Así

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24/13 \\ 10/13 \\ -28/13 \end{pmatrix}$$

$$Pc = \left(\frac{24}{13}, \frac{10}{13}, -\frac{28}{13}, 0\right)$$

No cumple las condiciones Kuhn-Tucker, ya que los multiplicadores no son no negativos.

Supongamos $\lambda_1 = 0\,, \lambda_2 > 0$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3\lambda_2 = 8 \\ 2x_2 + 2\lambda_2 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 = 12 \end{cases}$$

En forma matricial

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Así

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28/13 \\ 36/13 \\ 16/13 \end{pmatrix}$$

$$Pc = \left(\frac{28}{13}, \frac{36}{13}, 0, \frac{16}{13}\right)$$

Cumple las condiciones Kuhn-Tucker.

Supongamos $\lambda_1, \lambda_2 = 0$

$$\begin{cases} 2x_1 = 8 \\ 2x_2 = 8 \end{cases}$$

$$Pc = (4,4,0,0)$$

Cumple las condiciones Kuhn-Tucker.

Por lo tanto, los puntos críticos que cumplen con las condiciones Kuhn-Tucker son

$$Pc = \left(\frac{28}{13}, \frac{36}{13}, 0, \frac{16}{13}\right)$$

$$Pc = (4,4,0,0)$$

Al evaluar la función objetivo $-C$ en cada uno de esos puntos y sabiendo que el objetivo es maximizar, se tiene que $Pc = (4,4,0,0)$ Es la solución del problema de maximización.

Entonces, se muestra con este ejemplo que el mínimo de la función objetivo C es el máximo de la función objetivo $-C$. Así como se mencionó en las restricciones de igualdad las calificaciones de restricción, en las restricciones de desigualdad también estarán presentes. Las condiciones de Kuhn-Tucker son necesarias solamente si se satisface una disposición llamada la calificación de la restricción. Esto impone una cierta condición sobre las funciones de restricción de un problema de programación no lineal, con el objetivo de descartar irregularidades en la frontera del conjunto factible. La calificación de restricción requiere que la solución del sistema no sea un punto crítico de la función de restricción, o sea, que al menos una derivada parcial de la función de restricción con respecto a una variable independiente sea distinta de cero.

Capítulo 2: Concavidad y cuasiconcavidad

2.1 Funciones cóncavas y cuasicóncavas

Las funciones cóncavas juegan un rol muy importante en la teoría económica de manera similar que las funciones homogéneas. En los modelos económicos las funciones de demanda son homogéneas y cóncavas, y las funciones de costo son funciones homogéneas y convexas.

En este capítulo definiremos que es una función convexa, cóncava, cuasi convexa y cuasi cóncava, a partir de la forma cuadrática de una función. Las definiciones presentadas en este capítulo serán la base para la relación entre la Programación Cóncava y la Programación no Lineal, que será tratada en el capítulo 3, dando cierre a la Primera Parte.

Definición 2.1.1[ii]

Una función de valores reales f definida en un subconjunto convexo U de R^n es cóncava si para todo $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ y $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ en U y para todo $0 < t < 1$.

$$f\big(t(x_1, x_2, \dots, x_n) \ + (1-t)(y_1, y_2, \dots, y_n)\big) \geq tf(x_1, x_2, \dots, x_n) + (1-t)f(y_1, y_2, \dots, y_n)$$

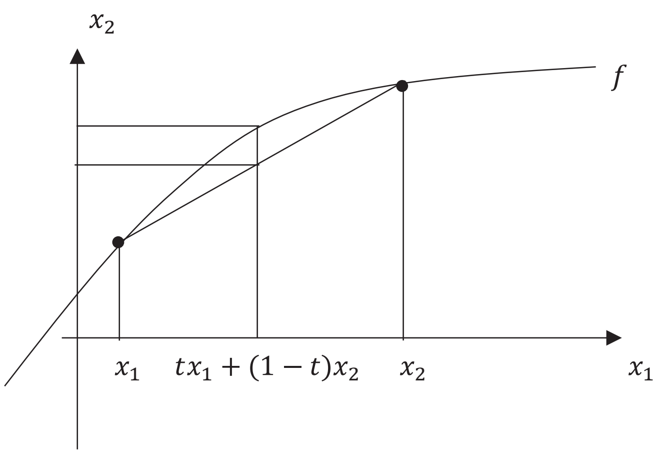
Una función de valores reales g definida en el subconjunto convexo U de R^n es convexa si para todo $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ y $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ en U y para todo $0 < t < 1$.

$$g\big(t(x_1, x_2, \dots, x_n) \ + (1-t)(y_1, y_2, \dots, y_n)\big) \leq tg(x_1, x_2, \dots, x_n) + (1-t)g(y_1, y_2, \dots, y_n)$$

Observaciones

- La función f es cóncava si y solo si $-f$ es convexa.
- No se debe confundir la noción de una función convexa con la noción de subconjunto convexo. El conjunto U es un conjunto convexo si al tomar dos puntos $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ y $(y_1, y_2, \dots, y_n)$, el segmento de recta de $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ a $(y_1, y_2, \dots, y_n)$
$$l = \{(t(x_1, x_2, \dots, x_n) \ + (1-t)(y_1, y_2, \dots, y_n))/0 \leq t \leq 1\}$$
Está en U (Que el segmento de recta este dentro del conjunto que quiero estudiar)
- La concavidad o convexidad de funciones requiere que el dominio de la función sea convexo.

Ejemplos gráficos de funciones cóncavas y convexas en R^2 y en R^3



$Gráfico$ 2.1.1

En este grafico se aprecia que

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \geq tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$$

Así que f es una función cóncava.

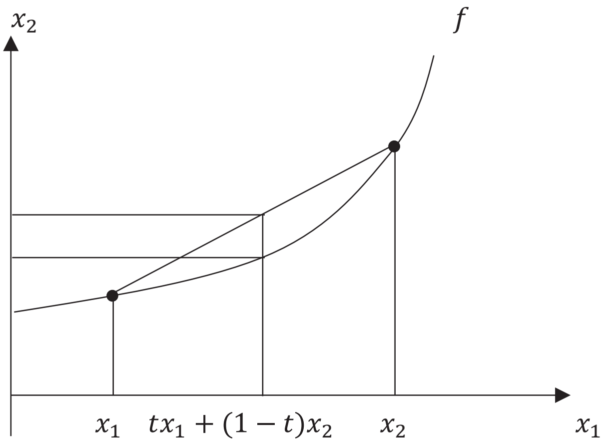


Gráfico 2.1.2

En este grafico se aprecia que

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$$

Así que f es una función convexa.

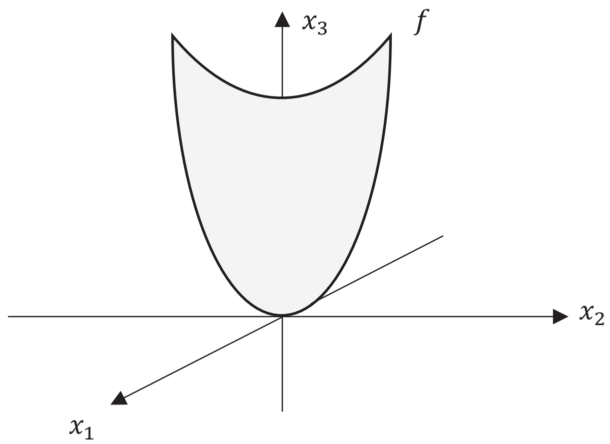


Gráfico 2.1.3

Donde $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$

Así que f es una función convexa.

<u>Teorema 2.1.1</u>
Sea f una función definida en un subconjunto convexo U de R^n. Entonces f es cóncava (Convexa) si y solo si las rectas de restricción en U son funciones cóncavas (Convexas) de una variable.

<u>Demostración</u>
Supongamos que la restricción de f en el segmento de recta en U es una función cóncava. Para probar que f es una función cóncava en U, sean $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ puntos arbitrarios en U. Sea $g(t) = f(t(x_1, x_2, \dots, x_n) + (1-t)(y_1, y_2, \dots, y_n))$. Por hipótesis, g es cóncava, para t entre 0 y 1.

Parto de la definición de g

$$f\big(t(x_1, x_2, \dots, x_n) + (1-t)(y_1, y_2, \dots, y_n)\big) = g(t)$$
$$= g(t.1 + (1-t).0)$$

Como g es cóncava resulta

$$\geq tg(1) + (1-t)g(0)$$

Por la definición de f resulta

$$= tf(x_1, x_2, \dots, x_n) + (1-t)f(y_1, y_2, \dots, y_n)$$

Así, f es cóncava

A la vuelta. Supongamos que f es cóncava. Se tiene que

$$g(t) = f(t(x_1, x_2, \dots, x_n) + (1-t)(y_1, y_2, \dots, y_n)\,)$$

La restricción de f en la línea formada por $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ y $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ es cóncava. Definamos s_1 y s_2 y sea $0 < t < 1$.

Por la definición de la función g resulta

$$g(ts_1 + (1-t)s_2)$$
$$= f((ts_1 + (1-t)s_2)(x_1, x_2, \dots, x_n) + \big(1 - f(ts_1 + (1-t)s_2)\big)(y_1, y_2, \dots, y_n)\,)$$
$$= f((t(s_1(x_1, x_2, \dots, x_n) + (1-s_1)(y_1, y_2, \dots, y_n))$$
$$+ (1-t)(s_2(x_1, x_2, \dots, x_n) + (1-t)s_2)(y_1, y_2, \dots, y_n)\,)$$

Como f es Cóncava resulta

$$\geq tf(s_1(x_1, x_2, \dots, x_n) + (1-s_1)(y_1, y_2, \dots, y_n)\,)$$
$$+ (1-t)f(s_2(x_1, x_2, \dots, x_n) + (1-t)s_2)(y_1, y_2, \dots, y_n)$$

Por la definición de g resulta

$$= tg(s_1) + (1-t)g(s_2)$$

Así, g es cóncava. ■

<u>Definición 2.1.2</u>
Una función de n variables es cóncava si y solo si el conjunto debajo de su gráfico en R^{n+1} es un conjunto convexo, como en el grafico 2.1.1. Una función es convexa si y solo si el conjunto sobre su gráfico enR^{n+1} es un conjunto convexo, como en las figuras 2.1.2 y 2.1.3.

<u>Criterio de cálculo para la concavidad</u>
Presentamos dos criterios analíticos para evaluar si una función f de una variable es cóncava o convexa.

1. La función C^1 en el intervalo I es cóncava si y solo si las primeras derivadas de f son funciones decrecientes de x, para todo x en I.

2. La función C^2 es cóncava en el intervalo I si y solo si las segundas derivadas de f son menores o iguales a 0.

La generalización de la primera derivada para funciones de varias variables es la matriz Jacobiana de las derivadas parciales de primer orden de f

$$Df(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)\right)$$

$Df(x_1, x_2, \dots, x_n)$ Puede considerarse como n funciones de n variables y $Df(x_1, x_2, \dots, x_n)$ es una función decreciente.

El siguiente teorema proporciona una condición de primer orden relacionada para la concavidad en R^1, que tiene una generalización para las funciones de varias variables.

<u>Teorema 2.1.2</u>
Sea f una función $C^1(R)$ en un intervalo I en R. Entonces, f es cóncava en I si y solo si

$f(y) - f(x) \leq \frac{df}{dx}(y - x)$, Para todo x, y en I.

La función f es convexa en I si y solo si

$f(y) - f(x) \geq \frac{df}{dx}(y - x)$, Para todo x, y en I.

<u>Demostración</u>
Supongamos que f es una función cóncava en I. Sean x e y pertenecientes a I y sea $0 < t \leq 1$. Entonces

$$tf(y) + (1 - t)f(x) \leq f(ty + (1 - t)x)$$

Desarrollando el lado izquierdo

$$tf(y) + f(x) - tf(x) \leq f(ty + (1 - t)x)$$

Pasando $f(x)$ al otro miembro

$$tf(y) - tf(x) \leq f(ty + (1 - t)x) - f(x)$$

Dividiendo miembro a miembro por t

$$f(y) - f(x) \leq \frac{f\big(x + t(y - x)\big) - f(x)}{t}$$

Multiplicando y dividiendo por $(y - x)$ en el miembro de la derecha

$$= \frac{f\big(x + t(y - x)\big) - f(x)}{t(y - x)}(y - x)$$

Combinando las expresiones resulta

$$f(y) - f(x) \leq \frac{f\big(x + t(y - x)\big) - f(x)}{t(y - x)}(y - x)$$

Si t tiende a cero, según la definición de derivada se tiene que

$$f(y) - f(x) \leq \frac{df}{dx}(y - x)$$

Que es la expresión equivalente que indica que una función es cóncava

Por otra parte, supongamos que

$$f(y) - f(x) \leq \frac{df}{dx}(y - x)$$

Se cumple para todo x e y en I. Entonces

$$f(x) - f\big((1-t)x + ty\big) \leq \frac{df}{dx}((1-t)x + ty)(x - (1-t)x + ty)$$

$$= -t\frac{df}{dx}((1-t)x + ty)(y - x)$$

$$f(x) - f\big((1-t)x + ty\big) \leq -t\frac{df}{dx}((1-t)x + ty)(y - x)$$

De forma similar se tiene

$$f(y) - f\big((1-t)x + ty\big) \leq \frac{df}{dx}((1-t)x + ty)(y - (1-t)x - ty)$$

$$= (1-t)\frac{df}{dx}((1-t)x + ty)(y - x)$$

$$f(y) - f\big((1-t)x + ty\big) \leq (1-t)\frac{df}{dx}((1-t)x + ty)(y - x)$$

Multiplicando la primera desigualdad por $(1-t)$ y la segunda desigualdad por t se tiene

$$(1-t)f(x) - (1-t)f\big((1-t)x + ty\big) \leq -(1-t)t\frac{df}{dx}((1-t)x + ty)(y - x)$$

$$tf(y) - tf\big((1-t)x + ty\big) \leq t(1-t)\frac{df}{dx}((1-t)x + ty)(y - x)$$

Sumando estas dos expresiones resulta

$$(1-t)f(x) + tf(y) \leq f((1-t)x + ty)$$

Así, se demuestra que f es cóncava. Cambiando de sentido todas las desigualdades, se hablaría de la convexidad de f, tanto para la demostración de ida como de vuelta. ■

Teorema 2.1.3: Generalización del Teorema 2.1.2

Sea f una función $C^1(R^n)$ en un subconjunto convexo U de R^n. Entonces, f es cóncava en U si y solo si para todo $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ y $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ en U:

$$f(y_1, y_2, \dots, y_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq Df(x_1, x_2, \dots, x_n)(y_1 - x_1, y_2 - x_2, \dots, y_n - x_n)^T$$

Esto es

$$f(y_1, y_2, \dots, y_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, \dots, x_n)(y_1 - x_1) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)(y_n - x_n)$$

De manera similar, f es convexa en U si y solo si

$$f(y_1, y_2, \dots, y_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, \dots, x_n)(y_1 - x_1) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)(y_n - x_n)$$

Para todo $(x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n)$ en U

Demostración
Sean $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ dos puntos arbitrarios en U. Sea

$$g_{xy}(t) \equiv f(t(y_1, y_2, \dots, y_n) + (1-t)(x_1, x_2, \dots, x_n))$$
$$= f(ty_1 + x_1 - tx_1, \dots, ty_n + x_n - tx_n)$$
$$= f(x_1 + t(y_1 - x_1), \dots, x_n + t(y_n - x_n))$$

Entonces, al derivar la expresión por t, por la regla de la cadena resulta

$$\frac{dg_{xy}}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}((x_1, x_2, \dots, x_n) + t(y_1 - x_1, y_2 - x_2, \dots, y_n - x_n))(y_j - x_j)$$

En $t = 0$ se tiene lo siguiente

$$\frac{dg_{xy}}{dt}(0) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, x_2, \dots, x_n)(y_j - x_j)$$
$$= Df(x_1, x_2, \dots, x_n)(y_1 - x_1, y_2 - x_2, \dots, y_n - x_n)$$

A la vuelta .Por el Teorema 2.1.1 y 2.1.2, f es cóncava si y solo si cada g_{xy} es cóncavo si y solo si para todo $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ en U.

$$g_{xy}(1) - g_{xy}(0) \leq \frac{dg_{xy}}{dt}(0)(1-0)$$
$$= \frac{dg_{xy}}{dt}(0)$$
$$g_{xy}(1) - g_{xy}(0) \leq \frac{dg_{xy}}{dt}(0)$$

Si y solo para todo $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ en U

$$f(y_1, y_2, \dots, y_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq Df(x_1, x_2, \dots, x_n)(y_1 - x_1, y_2 - x_2, \dots, y_n - x_n) \quad \blacksquare$$

Cuando f es una función C^1, para probar la concavidad o convexidad de f se puede utilizar las derivadas parciales para el caso de una función de 2 variables o la matriz Jacobiana $Df(x_1, x_2, \dots, x_n)$ para el caso de funciones de n variables, comparándolo con $f(y) - f(x)$ o $f(y_1, y_2, \dots, y_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, según sea el caso, en lugar de tomar dos puntos y trazarlos con un segmento de recta para ver si la función es cóncava o convexa. Los teoremas 2.1.1, 2.1.2 y 2.1.3 utilizan las derivadas para probar la concavidad o convexidad de una función y es muy útil porque si la función f es de varias variables su gráfica se torna imposible (No se podría graficar en el espacio). Para entrar en la generalización de las segundas derivadas, hablaremos de la forma cuadrática de una función y de la definición de una matriz

2.2 Forma cuadrática y matriz definida

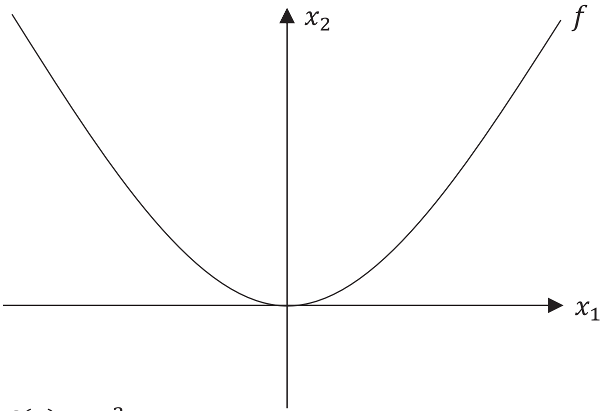
La forma cuadrática en R^n es una función de valores reales de la forma

$$Q(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i \le j} a_{ij}\, x_i x_j$$

En la que cada término es un monomio de grado dos. La forma cuadrática Q se puede representar por una matriz simétrica A, de esta forma

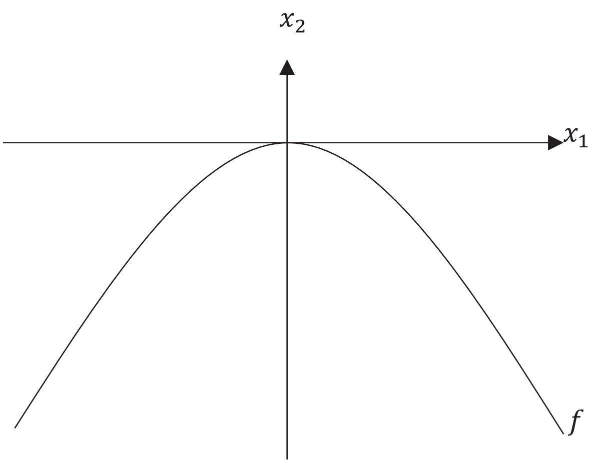
$$Q(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n)^T A (x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n)$$

<u>Ejemplos gráficos de formas cuadráticas</u>



$Gráfico$ 2.2.1

$f(x) = x^2$



$Gráfico$ 2.2.2

$f(x) = -x^2$

Formas cuadráticas genéricas

La forma cuadrática bidimensional genérica es

$$Q(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$$

En forma matricial queda

$$Q(x_1, x_2) = (x_1 \quad x_2)\begin{pmatrix} a_{11} & \frac{1}{2}a_{12} \\ \frac{1}{2}a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

La forma cuadrática tridimensional genérica es

$$Q(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + a_{23}x_2x_3$$

En forma matricial queda

$$Q(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \quad x_2 \quad x_3)\begin{pmatrix} a_{11} & \frac{1}{3}a_{12} & \frac{1}{3}a_{13} \\ \frac{1}{3}a_{12} & a_{22} & \frac{1}{3}a_{23} \\ \frac{1}{3}a_{13} & \frac{1}{3}a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

En base a estas tres exposiciones de la forma cuadrática Q, podemos hablar de la definición de formas cuadráticas.

Definición 2.2.1: Definición de formas cuadráticas[iii]
Una forma cuadrática siempre toma el valor cero en el origen. Su característica distintiva es el conjunto de valores que toma cuando no estoy en el origen. La forma general cuadrática de una variable es $f(x) = ax^2$

Si $a > 0$, $ax^2 \geq 0$ y $ax^2 = 0$, cuando $x = 0$. $x = 0$ Es el mínimo global.

Si $a < 0$, $ax^2 \leq 0$ y $ax^2 = 0$, cuando $x = 0$. $x = 0$ Es el máximo global.

En el caso de dos variables, la forma cuadrática es

$$Q_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

La cual es siempre mayor a cero en $(x_1, x_2) \neq (0; 0)$. Así que Q_1 es definida positiva. Por otro lado, las formas cuadráticas como

$$Q_2(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_2^2$$

Son estrictamente negativas excepto en el origen, en $(x_1, x_2) \neq (0; 0)$, y son llamadas definidas negativas. Sin embargo, cuando las formas cuadráticas son como

$$Q_3(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$$

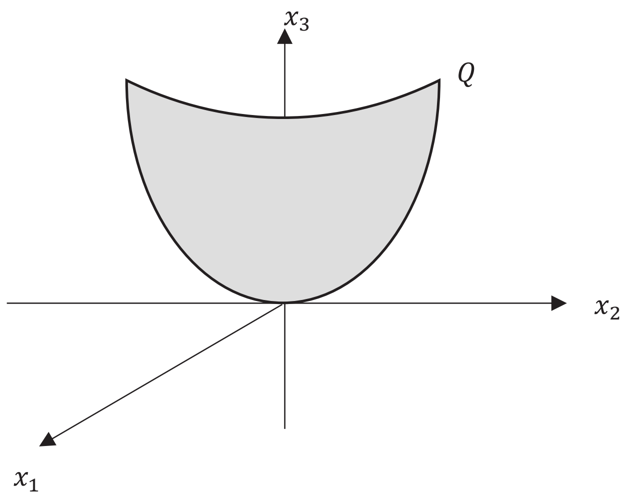
Que asumen valores tanto positivos como negativos, son llamadas indefinidas. También hay dos casos intermedios. Una forma cuadrática que es siempre mayor o igual a cero, pero puede ser igual a cero en algún punto (x_1, x_2) distinto del origen es la llamada forma semidefinida positiva. Esta propiedad esta ilustrada por la forma cuadrática

$$Q_4(x_1, x_2) = (x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2$$

Que nunca es negativa, pero es igual a cero en los puntos $(1, -1)$ y $(-2, 2)$. El otro caso intermedio es el siguiente. La forma cuadrática

$$Q_5(x_1, x_2) = -(x_1 + x_2)^2$$

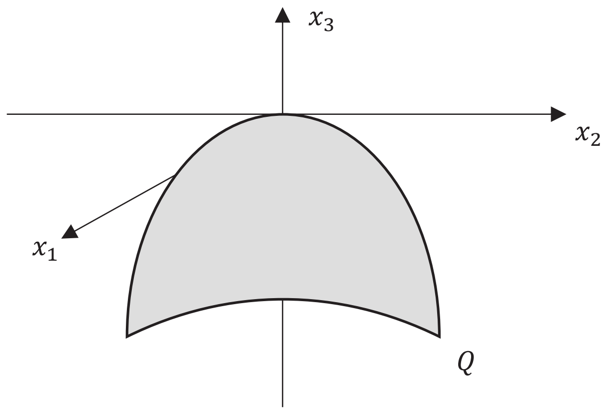
Que nunca es positiva, pero que es igual a cero en algún punto (x_1, x_2) distinto del origen, es la llamada forma semidefinida negativa. Los cinco casos, gráficamente, son



$Gráfico$ 2.2.3

Gráfica de la forma definida positiva.

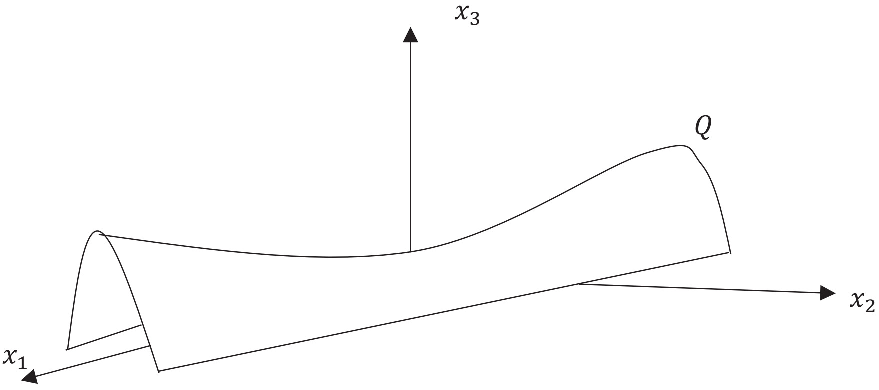
$$Q_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$



$Gráfico$ 2.2.4

Gráfica de la forma definida negativa

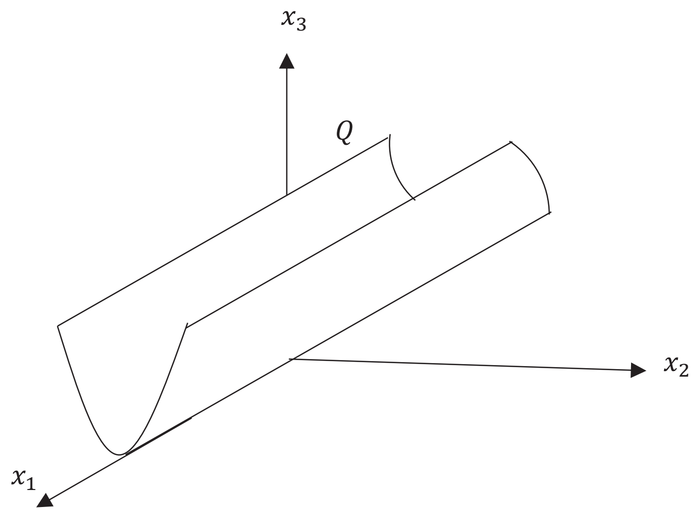
$$Q_2(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_2^2$$



$Gráfico\ 2.2.5$

Gráfica de la forma indefinida

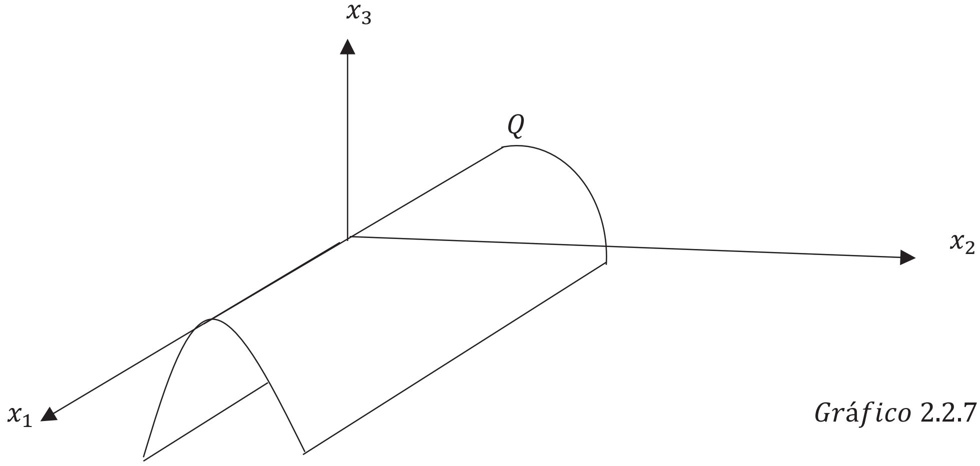
$$Q_3(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$$



$Gráfico\ 2.2.6$

Gráfica de la forma semidefinida positiva

$$Q_4(x_1, x_2) = (x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2$$



$Gráfico\ 2.2.7$

Gráfica de la forma semidefinida negativa

$$Q_5(x_1, x_2) = -(x_1 + x_2)^2$$

Ahora nos centraremos en la definición de matrices utilizando la forma cuadrática y las matrices simétricas.

Matriz simétrica definida

Una matriz simétrica se llama positiva definida, positiva semidefinida, negativa definida, negativa semidefinida, o indefinida según la definición de la forma cuadrática correspondiente

$$Q(x) = (x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n)^T A(x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n)$$

Definición 2.2.2

Sea A una matriz simétrica de nxn. Entonces A es:

- Definida positiva si $(x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n)^T A(x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n) > 0$, para todo $(x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n) \neq (0,0, \dots ,0)$
- Definida negativa si $(x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n)^T A(x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n) < 0$, para todo $(x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n) \neq (0,0, \dots ,0)$
- Semidefinida positiva si $(x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n)^T A(x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n) \geq 0$, para todo $(x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n) \neq (0,0, \dots ,0)$
- Semidefinida negativa si $(x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n)^T A(x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n) \leq 0$, para todo $(x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n) \neq (0,0, \dots ,0)$
- Indefinida si $(x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n)^T A(x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n) > 0$ para algunos $(x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n)$ y $(x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n)^T A(x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n) < 0$ para otros $(x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n)$.

Una matriz que es definida positiva es automáticamente definida positiva. Una matriz que es definida negativa es automáticamente semidefinida negativa.

Condiciones de segundo orden y convexidad

La definición de una matriz simétrica juega un papel importante en la teoría económica y en las matemáticas aplicadas en general. Por ejemplo, para una función $f(x)$ de una variable, el signo de la segunda derivada de f en un punto $\bar{x}$ da una condición necesaria y suficiente para determinar si $\bar{x}$ es un máximo de f, un minimo de f o ninguno. La generalización de esta prueba de segunda derivada para funciones de más variables (n variables) implica verificar si la matriz de segundas derivadas, o matriz Hessiana, de f es definida positiva, definida negativa o indefinida en un punto crítico de f. La matriz de segundas derivadas de f es

$$D^2 f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

Una función f de una variable es cóncava si su segunda derivada es menor a cero en algún intervalo. La generalización de este resultado para n variables establece que una función es cóncava en alguna región si la matriz de segundas derivada es definida negativa para todo $x_1, x_2, \dots, x_n$ en la región. Esto último tratará el Teorema 2.2.1. Para determinar la definición de una matriz simétrica utilizamos determinantes y el Teorema 2.2.1 proporciona un algoritmo directo que utiliza a los menores principales de la matriz para determinar cómo es la definición de tal matriz.

Teorema 2.2.1
Sea A una matriz simétrica de nxn, entonces

- A es definida positiva si y solo si todos los n menores principales son estrictamente positivos.
- A es definida negativa si y sólo si los n menores principales alternan signos como sigue:
$$|A_1| < 0, |A_2| > 0, |A_3| < 0, \dots$$
El menor principal de orden k, $|A_k|$ debe tener el mismo signo que $(-1)^k$. $|A_k|$ Es el menor principal de matriz A original.
- Si alguno de los k menores principales de A son distintos de cero pero no se ajustan a ninguno de los dos patrones de signos anteriores, A es indefinida.

Teorema 2.2.1
Sea A una matriz simétrica de nxn, entonces se tiene que A es semidefinida positiva si y solo si cada menor principal de A es mayor o igual a cero; A es semidefinida negativa si y sólo si cada menor principal de orden impar es menor o igual a cero y cada menor principal de orden par es mayor o igual a cero.

Ejemplo 2.2.1
Supongamos que A es una matriz simétrica de 4x4, la definición de la matriz A en cada caso es

- Si $|A_1| > 0, |A_2| > 0, |A_3| > 0, |A_4| > 0$, entonces A es definida positiva.
- Si $|A_1| < 0, |A_2| > 0, |A_3| < 0, |A_4| > 0$, entonces A es definida negativa.
- Si $|A_1| > 0, |A_2| > 0, |A_3| = 0, |A_4| < 0$, entonces A es indefinida porque $|A_4| < 0$
- Si $|A_1| < 0, |A_2| < 0, |A_3| < 0, |A_4| < 0$, entonces A es indefinida porque $|A_2| < 0$ y $|A_4| < 0$
- Si $|A_1| = 0, |A_2| < 0, |A_3| > 0, |A_4| = 0$, entonces A es indefinida porque $|A_2| < 0$
- Si $|A_1| > 0, |A_2| = 0, |A_3| > 0, |A_4| > 0$, entonces A es semidefinida positiva.
- Si $|A_1| = 0, |A_2| > 0, |A_3| = 0, |A_4| > 0$, entonces A es semidefinida positiva o semidefinida negativa.

El Teorema 2.2.3 tratará la definición de una función utilizando la matriz de segundas derivadas de la función f de n variables.

Teorema 2.2.3
Sea f una función $C^2(R^n)$ en un subconjunto abierto convexo U en R^n. Entonces f es una función cóncava en U si y solo si $D^2f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ es definida negativa, para todo $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ en U. Así, f es una función convexa en U si y solo si $D^2f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ es definida positiva, para todo $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ en U.

Demostración

Sean $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ y $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ dos puntos arbitrarios de U en R^n y sea $g_{xy}(t) \equiv f(t(y_1, y_2, \dots, y_n) + (1-t)(x_1, x_2, \dots, x_n))$. Entonces f es una función cóncava en U si y solo si cada $g_{xy}(t)$ es cóncava, lo que equivale a que cada $\frac{d^2 g_{xy}}{dt^2}(t) \leq 0$. Ahora, por la ecuación

$$\frac{dg_{xy}}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}((x_1, x_2, \dots, x_n) + t(y_1 - x_1, y_2 - x_2, \dots, y_n - x_n))(y_j - x_j)$$

Y por la regla de la cadena, se tiene que

$$\frac{d^2 g_{xy}}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}((x_1, x_2, \dots, x_n) + t(y_1 - x_1, y_2 - x_2, \dots, y_n - x_n))(y_j - x_j)\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}((x_1, x_2, \dots, x_n) + t(y_1 - x_1, y_2 - x_2, \dots, y_n - x_n))(y_j - x_j)(y_i - x_i)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} (y_j - x_j) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}((x_1, x_2, \dots, x_n) + t(y_1 - x_1, y_2 - x_2, \dots, y_n - x_n))\,(y_i - x_i)$$

$$= (y_1 - x_1, y_2 - x_2, \dots, y_n - x_n)^T . D^2 f\big((x_1, x_2, \dots, x_n) + t(y_1 - x_1, y_2 - x_2, \dots, y_n - x_n)\big).(y_1 - x_1, y_2 - x_2, \dots, y_n - x_n)$$

Si cada $D^2 f(z_1, z_2, \dots, z_n)$ es definida negativa, entonces se tiene que

- Cada $\frac{d^2 g_{xy}}{dt^2} \leq 0$
- Cada $g_{xy}(t)$ es cóncava
- La función f es cóncava.

A la inversa, suponga que f es cóncava en U. Sea $(z_1, z_2, \dots, z_n)$ un punto arbitrario en U y sea $\boldsymbol{v}$ un vector de desplazamiento arbitrario en R^n. Queremos mostrar que $\boldsymbol{v}^T D^2 f(z_1, z_2, \dots, z_n)\boldsymbol{v} \leq 0$. Como U está abierto, hay un $t_0 > 0$ tal que $(y_1, y_2, \dots, y_n) = (z_1, z_2, \dots, z_n) + t_0 \boldsymbol{v}$ está en U. Dado que f es cóncavo, g_{xy} es cóncavo y $\frac{d^2 g_{xy}}{dt^2}(0) \leq 0$. Por el párrafo anterior, se tiene que

$$0 \geq \frac{d^2 g_{xy}}{dt^2}(0) = ((y_1, y_2, \dots, y_n) - (z_1, z_2, \dots, z_n))^T D^2 f((z_1, z_2, \dots, z_n))((y_1, y_2, \dots, y_n) - (z_1, z_2, \dots, z_n))$$

$$= (t_0 \boldsymbol{v})^T . D^2 f(z_1, z_2, \dots, z_n).(t_0 \boldsymbol{v})$$

$$= (t_0)^2 [\boldsymbol{v}^T D^2 f(z_1, z_2, \dots, z_n)\boldsymbol{v}]$$

Así $\boldsymbol{v}^T D^2 f(z_1, z_2, \dots, z_n)\boldsymbol{v} \leq 0$ y $D^2 f(z_1, z_2, \dots, z_n)$ es definida negativa para todo $(z_1, z_2, \dots, z_n)$ en U. ■

Ejemplo 2.2.2
La matriz de segundas derivadas de la función $f(x_1, x_2) = {x_1}^4 + {x_1}^2{x_2}^2 + {x_2}^4 - 3x_1 - 8x_2$ es

$$D^2f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 12{x_1}^2 + 2{x_2}^2 & 4x_1x_2 \\ 4x_1x_2 & 2{x_1}^2 + 12{x_2}^2 \end{pmatrix}$$

Para $(x_1, x_2) \neq (0; 0)$, los menores principales son

$$|12{x_1}^2 + 2{x_2}^2| = 12{x_1}^2 + 2{x_2}^2 > 0$$

$$\begin{vmatrix} 12{x_1}^2 + 2{x_2}^2 & 4x_1x_2 \\ 4x_1x_2 & 2{x_1}^2 + 12{x_2}^2 \end{vmatrix} = 24{x_1}^4 + 132{x_1}^2{x_2}^2 + 24{x_2}^4 > 0$$

Así $D^2f(x_1, x_2)$ es definida positiva en R^2 y f es una función convexa en R^2.

Ejemplo 2.2.3
La matriz Hessiana correspondiente a la función $f(x_1, x_2) = x_1x_2$ es

$$D^2f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Los menores principales son

$$|0| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0$$

Así $D^2f(x_1, x_2)$ es indefinida en R^2 y f es una función indefinida en R^2.

Ejemplo 2.2.4
La matriz de segundas derivadas de la función $g(x_1, x_2) = {x_1}^{1/4}{x_2}^{3/4}$ es

$$D^2g(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{16}{x_1}^{-7/4}{x_2}^{3/4} & \frac{3}{16}{x_1}^{-3/4}{x_2}^{-1/4} \\ \frac{3}{16}{x_1}^{-3/4}{x_2}^{-1/4} & -\frac{3}{16}{x_1}^{1/4}{x_2}^{-5/4} \end{pmatrix}$$

Para $x_1 > 0$ y $x_2 > 0$, los menores principales son

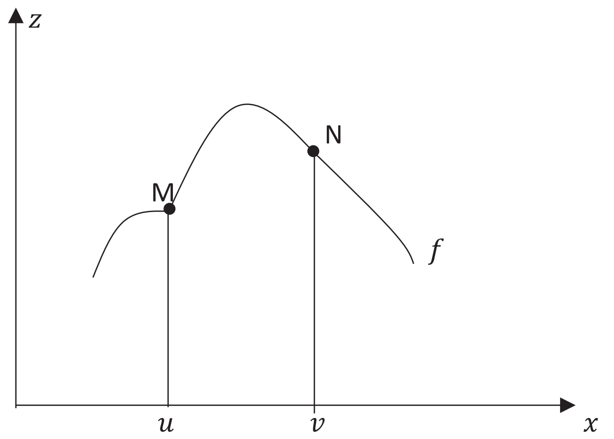
$$\left|-\frac{3}{16}{x_1}^{-7/4}{x_2}^{3/4}\right| = -\frac{3}{16}{x_1}^{-\frac{7}{4}}{x_2}^{\frac{3}{4}} < 0$$

$$\begin{vmatrix} -\frac{3}{16}{x_1}^{-7/4}{x_2}^{3/4} & \frac{3}{16}{x_1}^{-3/4}{x_2}^{-1/4} \\ \frac{3}{16}{x_1}^{-3/4}{x_2}^{-1/4} & -\frac{3}{16}{x_1}^{1/4}{x_2}^{-5/4} \end{vmatrix} = 0$$

Así $D^2g(x_1, x_2)$ es semidefinida negativa en R_+^2 , y g es una función cuasicóncava en R_+^2.

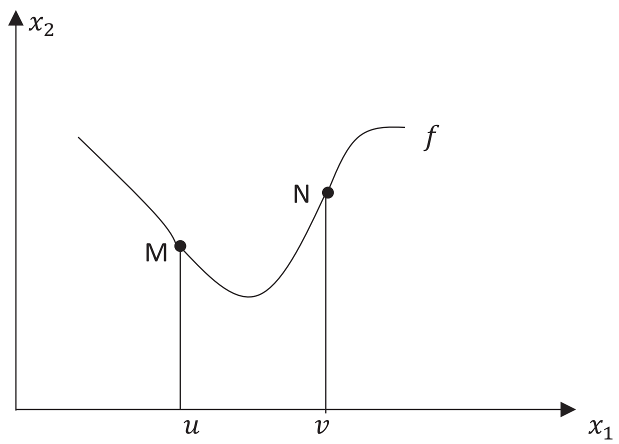
2.3 Funciones cuasicóncavas y cuasiconvexas

Conocer la cuasiconcavidad y la cuasiconvexidad de la función objetivo evita la necesidad de verificar las condiciones suficientes de segundo orden, tanto para la optimización restringida como para la optimización no restringida. La cuasiconcavidad y la cuasiconvexidad poder ser estricta o no. Para caracterizar esto último, geométricamente, digamos que: Sean u y v dos puntos cualquiera diferentes en el dominio (Un conjunto convexo) de una función y, y sea el segmento de línea uv en el dominio que origina el arco MN en la gráfica de la función, tal que el punto N esté más alto que o tenga la misma altura que el punto M. Entonces, se dice que la función f es cuasicóncava (Cuasiconvexa) si todos los puntos en el arco MN diferentes de M y N están más altos que o tienen la misma altura que el punto M (Están más bajo o tienen la misma altura que el punto N). Se dice que una función f es estrictamente cuasicóncava (Estrictamente cuasiconvexa) si todos los puntos del arco MN diferentes de u y v están estrictamente a mayor altura que el punto M (Estrictamente a una menor altura que el punto N). Así se puede ver que cualquier función estrictamente cuasicóncava (Estrictamente cuasiconvexa) es cuasicóncava (Cuasiconvexa), pero a la inversa no es cierto. Gráficamente todo esto es así



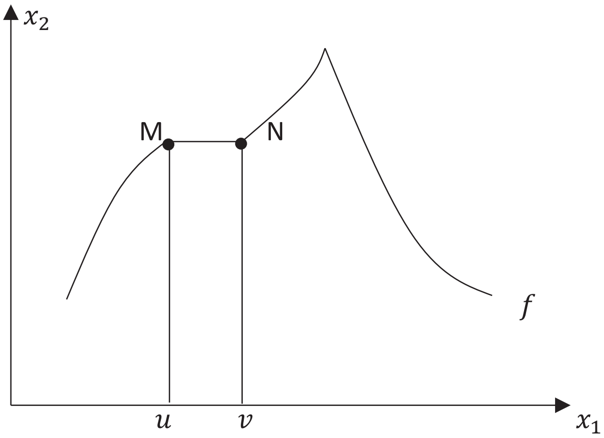
$Gráfico$ 2.3.1

El segmento de línea uv del dominio origina el arco MN en la curva tal que N está a mayor altura que M. Como todos los puntos entre M y N en el arco están estrictamente a mayor altura que M, este arco específico satisface la condición de la cuasiconcavidad estricta. Esta función cumple con la condición de la cuasiconcavidad no estricta.



$Gráfico$ 2.3.2

Todos los puntos del arco MN están a menor altura que N, que es el más alto de los dos extremos y lo mismo sucede con todos los arcos que pueden trazarse. Entonces, la función es estrictamente cuasiconvexa. Esta función cumple la condición de cuasiconvexidad no estricta.



$Gráfico$ 2.3.3

En este grafico hay un segmento de línea horizontal MN, donde todos los puntos tienen la misma altura. Por lo tanto, este segmento de línea y toda la curva completa puede cumplir con la condición de cuasiconcavidad, pero no la de cuasiconcavidad estricta. Una función cuasicóncava que tampoco es cóncava tiene una gráfica parecida a la de una campana, o una parte de ella. Una función cuasiconvexa tiene una gráfica parecida a una campana invertida, o una parte de ella.

Definición 2.3.1: Definición algebraica
Una función f es cuasicóncava si y solo si para cualquier par de puntos diferentes de u y v en el dominio (Conjunto convexo) de f, y para todo $0 < \emptyset < 1$

$f(v) \geq f(u)$, esto implica que $f(\emptyset u + (1-\emptyset)v) \geq f(u)$

De forma similar:

Una función es cuasiconvexa si y solo si para cualquier par de puntos diferentes de u y v en el dominio (Conjunto convexo) de f, y para todo $0 < \emptyset < 1$

$f(v) \geq f(u)$, esto implica que $f(\emptyset u + (1-\emptyset)v) \leq f(u)$

Para adaptar esto a la cuasiconcavidad y cuasiconvexidad estrictas, las dos desigualdades débiles que están a la derecha deben transformarse por desigualdades estrictas.

A partir de la Definición 2.3.1 se mencionaran los siguientes teoremas

Teorema 2.3.1: Negativo de una función
Si f es cuasicóncava (Estrictamente cuasicóncava), entonces $-f$ es cuasiconvexa (Estrictamente cuasiconvexa)

Demostración
Sea f cuasicóncava, con $f(u) \geq f(v)$, entonces, mediante la definición algebraica

$$f(\emptyset u + (1-\emptyset)v) \geq f(u)$$

Respecto a la función$-f(x)$ tenemos

$$-f(u) \leq -f(v)$$

Por la definición algebraica

$$-f(\emptyset u + (1-\emptyset)v) \leq -f(u)$$

Si interpreto $-f(u)$ como la altura del punto N, y $-f(v)$ como la altura del punto M, la función $-f$ satisface la condición de cuasiconvexidad de la definición algebraica. Esto satisface uno de los 4 casos citados en el Teorema 2.3.1. Probar los otros 3 casos restantes, es similar. ■

<u>Teorema 2.3.2: Concavidad contra cuasiconcavidad</u>
Cualquier función cóncava (Convexa) es cuasicóncava (Cuasiconvexa), pero el inverso no es cierto. De forma similar, cualquier función estrictamente cóncava (Estrictamente convexa) es estrictamente cuasicóncava (Estrictamente cuasiconvexa), pero el inverso no es cierto.

<u>Demostración</u>
Sea $f(x)$ una función cóncava. Entonces, mediante la Definición 2.3.1

$$f(\emptyset u + (1-\emptyset)v) \geq \emptyset f(u) + (1-\emptyset)f(v)$$

Supongamos que $f(u) \geq f(v)$. Entonces, cualquier promedio ponderado de $f(u)$ y $f(v)$ no puede ser menos que $f(u)$. Es decir

$$\emptyset f(u) + (1-\emptyset)f(v) \geq f(u)$$

Por transitividad, combinando estas dos últimas expresiones, se tiene que

$$f(\emptyset u + (1-\emptyset)v) \geq f(u)$$

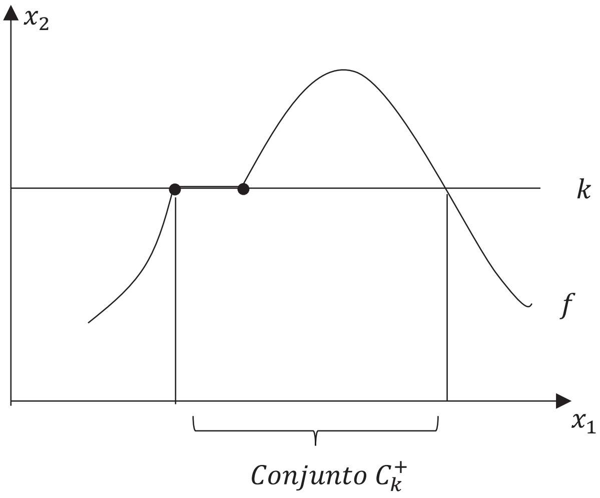
Que satisface la condición de cuasiconcavidad en la Definición 2.3.1 ■

<u>Teorema 2.3.3: Función lineal</u>
Si f es una función lineal, entonces es cuasicóncava y cuasiconvexa al mismo tiempo.

<u>Demostración</u>
Por el Teorema 2.3.2, una función lineal debe ser también cuasicóncava y cuasiconvexa, aunque no estrictamente. Una función lineal se traza como una línea recta, plano o hiperplano, de modo que el segmento de recta MN coincide siempre con el arco MN. La parte de la igualdad de las dos desigualdades débiles de la Definición 2.3.1 se satisface de forma simultánea, lo cual hace que la función califique como cuasicóncava y cuasiconvexa, pero no de forma estricta. ■

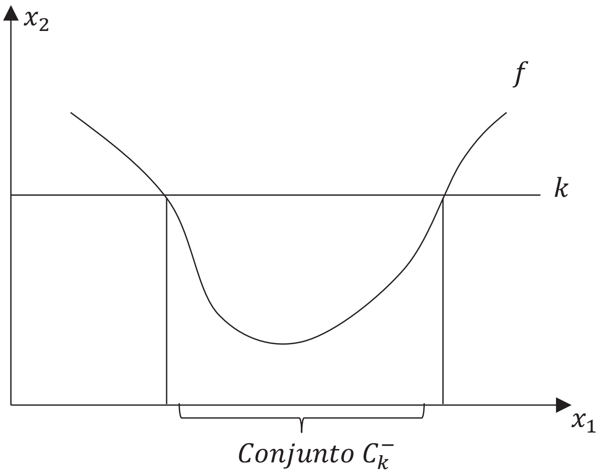
<u>Definición 2.3.2: Definición alternativa a la Definición 2.3.1</u>
Una función $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de n variables es cuasicóncava si y solo si, para cualquier constante k, el conjunto $C_k^+ = \{(x_1, x_2, \dots, x_n)/f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq k\}$ es un conjunto convexo. De forma similar, Una función $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de n variables es cuasiconvexa si y sólo si, para cualquier constante k, el conjunto $C_k^- = \{(x_1, x_2, \dots, x_n)/f(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq k\}$ es un conjunto convexo. Los conjuntos C_k^+, C_k^- son subconjuntos del dominio convexo. Esto muestra que una función convexa (O una función cóncava) puede originar un conjunto convexo.

Gráficamente en R^2



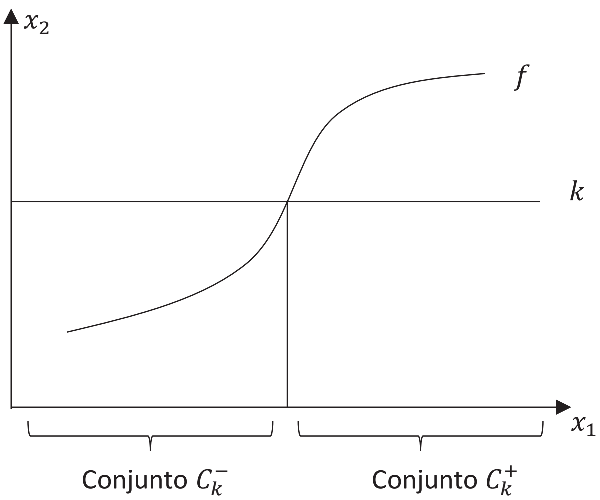
$Gráfico$ 2.3.4

Función cuasicóncava. Para cualquier valor de k, el conjunto C_k^+ es convexo.



$Gráfico$ 2.3.5

Función cuasiconvexa. Para cualquier valor de k, el conjunto C_k^- es convexo.



$Gráfico$ 2.3.6

Función monótona. Es diferente a las dos últimas funciones expuestas. Tanto C_k^+ como C_k^- son conjuntos convexos. Por lo tanto esta función monótona es cuasicóncava y cuasiconvexa a la vez.

En la Definición 2.3.2 no puede hacerse la distinción entre las variedades estricta y no estricta. Por lo tanto, estas propiedades no son suficientes para la concavidad y la convexidad, ya sean estrictas o no estrictas.

Dada una función cóncava que debe ser forzosamente cuasicóncava, concluimos que C_k^+ es un conjunto convexo; pero dado que C_k^+ es un conjunto convexo, concluimos que la función f es cuasicóncava, pero no necesariamente cóncava.

Funciones diferenciales

Definición 2.3.3

Si f es una función diferenciable, la cuasiconcavidad y la cuasiconvexidad pueden definirse alternativamente en términos de sus primeras derivadas.

Una función f diferenciable de una variable es cuasicóncava si y sólo si, para cualquier par de puntos diferentes de u y v en el dominio

$f(u) \geq f(v)$, esto implica $\frac{df}{dx}(u)(v-u) \geq 0$

De forma similar, Una función f diferenciable de una variable es cuasiconvexa si y sólo si, para cualquier par de puntos diferentes de u y v en el dominio

$f(v) \geq f(u)$, esto implica $\frac{df}{dx}(v)(v-u) \geq 0$

La cuasiconcavidad y la cuasiconvexidad serán estrictas si la desigualdad débil de la derecha se transforma en la desigualdad estricta mayor a cero.

Cuando hay dos o más variables independientes, la Definición 2.3.3 debe modificarse

Definición 2.3.4

Una función $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es cuasiconvexa si y sólo si, para cualquiera dos puntos diferentes $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y $v(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ en el dominio

$$f(v(x_1, x_2, \ldots, x_n)) \geq f(u(x_1, x_2, \ldots, x_n))$$

Esto implica que

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(u(x_1, x_2, \ldots, x_n))(v_j - u_j) \geq 0$$

De forma similar, Una función $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es cuasiconvexa si y sólo si, para cualquiera dos puntos deferentes $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y $v(x_1, x_2, \ldots, x_n)$en el dominio

$$f(v(x_1, x_2, \ldots, x_n)) \geq f(u(x_1, x_2, \ldots, x_n))$$

Esto implica que

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(v(x_1, x_2, \dots, x_n))(v_j - u_j) \geq 0$$

Donde $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ deberá evaluarse para $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ o $v(x_1, x_2, \dots, x_n)$ según sea el caso.

Para la cuasiconcavidad y cuasiconvexidad estrictas, la desigualdad débil de la derecha debe transformarse en la desigualdad estricta.

<u>Definición 2.3.5</u>
Si una función $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ es una función $C^2(R^n)$, la cuasiconcavidad y la cuasiconvexidad pueden verificarse mediante la primera y la segunda derivadas parciales de la función, arregladas en el determinante orlado

$$|B| = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{vmatrix}$$

<u>Diferencias entre $|B|$ y $|\overline{H}|$</u>
El determinante $|B|$ se diferencia del Hessiano orlado $|\overline{H}|$, el cual es

$$|\overline{H}| = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial g}{\partial x_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g}{\partial x_n} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n^2} \end{vmatrix}$$

Por dos cuestiones

1. Los elementos situados en la orla de $|B|$ son las derivadas parciales de primer orden de la función f en vez de la función de restricción g (Restricciones de desigualdad).
2. Los elementos restantes de $|B|$ son las derivadas parciales de segundo orden de f en vez de la función Lagrangiana L (Formada por la función objetivo f y por la función de restricción de desigualdad g).

Antes de definir la relación entre $|B|$ y $|\overline{H}|$ terminemos con la definición de concavidad y convexidad de la función $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ Como $|B|$ depende exclusivamente de las derivadas de la función f, podemos usar $|B|$, junto con sus menores principales

$$|B_1| = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \end{vmatrix}$$

$$|B_2| = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{vmatrix}$$

$$|B_n| = |B|$$

Para seguir con la definición y establecer un patrón. Establecemos dos condiciones, Una necesaria y otra suficiente. Ambas se relacionan con la cuasiconcavidad en un dominio que está formado solamente por el cuadrante n-dimensional no negativo, es decir $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$.

<u>Definición 2.3.6: Condición necesaria</u>
La condición necesaria para que $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sea cuasicóncava en el cuadrante n-dimensional no negativo es que

$|B_1| \leq 0, |B_2| \geq 0, \dots, |B_n| \leq 0$, si n es impar.

$|B_1| \leq 0, |B_2| \geq 0, \dots, |B_n| \geq 0$, si n es par.

Siempre que las derivadas se evalúen en el cuadrante n-dimensional no negativo.

<u>Definición 2.3.7: Condición suficiente</u>
La condición suficiente para que f sea estrictamente cuasicóncava (Cóncava) en el cuadrante n-dimensional no negativo es que

$|B_1| < 0, |B_2| > 0, \dots, |B_n| < 0$, si n es impar.

$|B_1| < 0, |B_2| > 0, \dots, |B_n| > 0$, si n es par.

Siempre que las derivadas parciales se evalúen en el cuadrante n-dimensional no negativo.

<u>Relación entre $|B|$ y $|\overline{H}|$</u>
Tomemos un caso de una función objetivo f de n variables sujeta a una función de restricción g lineal con n variables dada por

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = b$$

La función Lagrangiana es

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; \lambda) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) - \lambda[a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n - b]$$

Las condiciones de primer orden son

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} - \lambda a_j$$

Y las segundas derivadas son para $i \neq j$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

La primera derivada de la función de restricción g es

$$\frac{\partial g}{\partial x_j} = a_j$$

Si se satisfacen las condiciones de primer orden tenemos

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} - \lambda a_j = 0$$

Con lo cual resulta

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \lambda a_j$$

Reemplazando por la primera derivada de g, se tiene

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x_j}$$

Para $j = 1,2, \dots, n$

Y se observa que la orla de $|B|$ es la orla de $|\overline{H}|$ multiplicada por λ. Como la matriz $|B|$ y $|\overline{H}|$ son simétricas, y factorizando el λ del determinante de $\overline{H}$, desde las orlas horizontales y verticales, se tiene que

$$|B| = \lambda^2 |\overline{H}|$$

En el caso de la restricción lineal, los dos determinantes orlados siempre poseen el mismo signo en el punto crítico de L. Por esta razón, los menores principales $|B_j|$ y $|\overline{H_j}|$ con $j = 1,2, \dots, n$ deben compartir el mismo signo en ese punto.

Así $|B|$ satisface la condición suficiente para la cuasiconcavidad estricta y el Hessiano orlado $|\overline{H}|$ satisface la condición suficiente para la maximización restringida

$|\overline{H_1}| < 0, |\overline{H_2}| > 0, |\overline{H_3}| < 0, |\overline{H_4}| > 0, \dots, (-1)^n |\overline{H_n}| > 0$, si n es par.

$|\overline{H_1}| < 0, |\overline{H_2}| > 0, |\overline{H_3}| < 0, |\overline{H_4}| > 0, \dots, (-1)^n |\overline{H_n}| < 0$, si n es impar

Ejemplo 2.3.1
Sea $f(x_1, x_2) = {x_1}^a {x_2}^b$ con $x_1 > 0, x_2 > 0, 0 < a < 1, 0 < b < 1$

Formamos la matriz B. Las derivadas parciales son

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = a {x_1}^{a-1} {x_2}^b$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = b{x_1}^a {x_2}^{b-1}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = a(a-1){x_1}^{a-2}{x_2}^b$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = b(b-1){x_1}^a {x_2}^{b-2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = ab{x_1}^{a-1}{x_2}^{b-1}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & a{x_1}^{a-1}{x_2}^b & b{x_1}^a{x_2}^{b-1} \\ a{x_1}^{a-1}{x_2}^b & a(a-1){x_1}^{a-2}{x_2}^b & ab{x_1}^{a-1}{x_2}^{b-1} \\ b{x_1}^a{x_2}^{b-1} & ab{x_1}^{a-1}{x_2}^{b-1} & b(b-1){x_1}^a{x_2}^{b-2} \end{pmatrix}$$

Los menores principales son

$$|B_1| = \begin{vmatrix} 0 & a{x_1}^{a-1}{x_2}^b \\ a{x_1}^{a-1}{x_2}^b & a(a-1){x_1}^{a-2}{x_2}^b \end{vmatrix} = -\left(a{x_1}^{a-1}{x_2}^b\right)^2 < 0$$

$$|B_2| = \begin{vmatrix} 0 & a{x_1}^{a-1}{x_2}^b & b{x_1}^a{x_2}^{b-1} \\ a{x_1}^{a-1}{x_2}^b & a(a-1){x_1}^{a-2}{x_2}^b & ab{x_1}^{a-1}{x_2}^{b-1} \\ b{x_1}^a{x_2}^{b-1} & ab{x_1}^{a-1}{x_2}^{b-1} & b(b-1){x_1}^a{x_2}^{b-2} \end{vmatrix}$$
$$= [2a^2b^2 + a(1-a)b^2 + a^2b(1-b)]{x_1}^{3a-2}{x_2}^{3b-2} > 0$$

Esto satisface la condición de cuasiconcavidad estricta para $f(x_1, x_2)$. Observar que se llega a la misma conclusión utilizando la definición de la matriz de segundas derivadas $D^2 f(x_1, x_2)$.

<u>Ejemplo 2.3.2</u>
Dadas las siguientes funciones

a) $L = -{x_1}^2 - {x_2}^2$ con $x_1 > 0, x_2 > 0$.
b) $L = -(x_1+1)^2 - (x_2+2)^2$ con $x_1 > 0, x_2 > 0$.

Utilizaremos determinantes orlados para clasificar estas funciones en cuanto a la cuasiconcavidad y a la cuasiconvexidad.

Con a) $L = -{x_1}^2 - {x_2}^2$ Con $x_1 > 0, x_2 > 0$.

Formamos la matriz $\overline{H}$. Las derivadas parciales son

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -2x_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = -2x_2$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} = -2$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} = -2$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1} = 0$$

$$\bar{H} = \begin{pmatrix} 0 & -2x_1 & -2x_2 \\ -2x_1 & -2 & 0 \\ -2x_2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Los menores principales son

$$|\bar{H}_1| = \begin{vmatrix} 0 & -2x_1 \\ -2x_1 & -2 \end{vmatrix} = -4{x_1}^2 < 0$$

$$|\bar{H}_2| = \begin{vmatrix} 0 & -2x_1 & -2x_2 \\ -2x_1 & -2 & 0 \\ -2x_2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 8({x_1}^2 + {x_2}^2) > 0$$

Cumple con las condiciones de cuasiconcavidad estricta, así que $\bar{H}$ es definida negativa en R^2 y L es una función cuasicóncava estricta (Cóncava) en R^2.

Con b) $L = -(x_1 + 1)^2 - (x_2 + 2)^2$ Con $x_1 > 0, x_2 > 0$.

Formamos la matriz $\bar{H}$. Las derivadas parciales son

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -2x_1 - 2$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = -2x_2 - 4$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} = -2$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} = -2$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1} = 0$$

$$\bar{H} = \begin{pmatrix} 0 & -2x_1 - 2 & -2x_2 - 4 \\ -2x_1 - 2 & -2 & 0 \\ -2x_2 - 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Los menores principales son

$$|\overline{H_1}| = \begin{vmatrix} 0 & -2x_1 - 2 \\ -2x_1 - 2 & -2 \end{vmatrix} = -(-2x_1 - 2)^2 < 0$$

$$|\overline{H_2}| = \begin{vmatrix} 0 & -2x_1 - 2 & -2x_2 - 4 \\ -2x_1 - 2 & -2 & 0 \\ -2x_2 - 4 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 2(2x_1 + 2)^2 + 2(2x_2 + 4)^2 > 0$$

Así, $\overline{H}$ es definida negativa en R^2 y L es una función cuasicóncava estricta (Cóncava) en R^2.

Entonces, analizar la concavidad y la convexidad de la función objetivo es otra alternativa para verificar las condiciones de segundo orden y así decidir si un punto crítico es un máximo o un mínimo. Este análisis depende de la diferenciabilidad de la función con respecto a sus variables independientes y del orden de esa diferenciabilidad. Si la función objetivo no es diferenciable, no está en las condiciones del teorema anterior, por lo tanto para analizar la existencia de extremos, se usará la definición algebraica (Definición 2.3.1).

Robledo, Yonathan Ariel.
Licenciatura en Economía, EEyN UNSAM.

Capítulo 3: Relación entre la Programación Cóncava y la Programación no Lineal

3.1 Teoremas sobre Programación Cóncava

En este capítulo se utilizaran todas las herramientas vistas en el capítulo 1 y 2 y se relacionara la programación cóncava con la programación no lineal. Mencionaremos a continuación unos teoremas sobre la programación cóncava.

Teorema 3.1.1: El teorema de suficiencia de Kuhn-Tucker. La Programación Cóncava

En los problemas clásicos de optimización, las condiciones suficientes para máximos y mínimos se expresan en términos de los signos de las derivadas o diferenciales de segundo orden. Estas condiciones de segundo orden están relacionadas con los conceptos de concavidad y convexidad. En la Programación no Lineal, las condiciones suficientes pueden enunciarse en términos de concavidad y convexidad, y estos conceptos se aplicaran no solo a la función objetivo $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sino también a las funciones de restriccion $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Dado el problema de programación no lineal

$$Maximizar\ f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Sujeto a

$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_i, i = 1,2, \dots, n$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$$

Si se satisfacen las siguientes condiciones

1. La función objetivo $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ es diferenciable y cóncava en el cuadrante n-dimensional positivo
2. Cada función de restricción$g_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ es diferenciable y convexa en el cuadrante n-dimensional positivo
3. El punto $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ satisface las condiciones de Kuhn Tucker

Entonces, $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ da un máximo global de $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

El problema de maximización abordado en el teorema de suficiencia anterior se denomina programación cóncava. Esto se debe a que Kuhn y Tucker adoptan la desigualdad mayor o igual en lugar de la desigualdad menor o igual en cada restricción, de modo que la condición 2 requerirá que todas las funciones $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ fueran cóncavas, al igual que la función $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. El teorema de suficiencia trata solamente problemas de maximización, pero adaptarlo a problemas de minimización no es difícil. Se deben intercambiar las dos palabras cóncavas y convexas en las condiciones 1 y 2 y usar las condiciones de Kuhn-Tucker para valores mínimos en la condición 3.

Ejemplo 3.1.1

Apliquemos el Teorema de suficiencia de Kuhn-Tucker al problema de maximización

$$Maximizar\ f(x_1, x_2) = x_1 x_2 - x_1 + x_2$$

Sujeto a

$$x_1^2 + x_2^2 \leq 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Condición 1

La función f

$$f(x_1, x_2) = x_1 x_2 - x_1 + x_2$$

Está restringida por la función

$$g(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

Formamos la matriz $\overline{H}$. Las derivadas parciales son

$$\frac{\partial g}{\partial x_1} = 2x_1$$

$$\frac{\partial g}{\partial x_2} = 2x_2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = x_2 - 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = x_1 + 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = 1$$

$$\overline{H} = \begin{pmatrix} 0 & 2x_1 & 2x_2 \\ 2x_1 & 0 & 1 \\ 2x_2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Los menores principales son

$$|\overline{H}_1| = \begin{vmatrix} 0 & 2x_1 \\ 2x_1 & 0 \end{vmatrix} = -4x_1^2 < 0$$

$$|\overline{H}_2| = \begin{vmatrix} 0 & 2x_1 & 2x_2 \\ 2x_1 & 0 & 1 \\ 2x_2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 8x_1 x_2 > 0$$

Así, $\overline{H}$ es definida negativa en R^2y f es una función cuasicóncava estricta (Cóncava) en R^2.

Condición 2

La función g es

$$g(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

Formamos la matriz $D^2 g(x_1, x_2)$. Las derivadas parciales son

$$\frac{\partial g}{\partial x_1} = 2x_1$$

$$\frac{\partial g}{\partial x_2} = 2x_2$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} = 2$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2} = 2$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 g}{\partial x_2 \partial x_1} = 0$$

$$D^2 g(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Los menores principales son

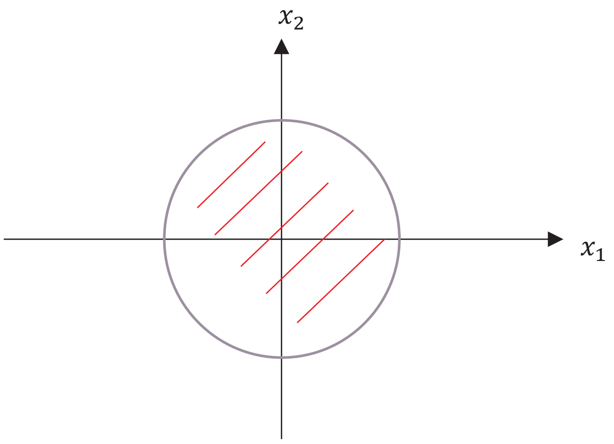
$$|2| = 2 > 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$$

Así, $D^2 g(x_1, x_2)$ es definida positiva y g es una función cuasiconvexa estricta (Convexa) en R^2.

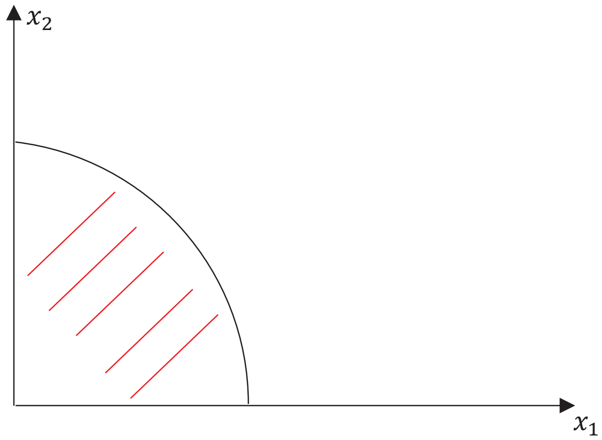
Condición 3

La función de restricción tiene la forma de una circunferencia de centro en el origen y de radio 1, y como se considera el menor o igual en la restricción, marco la región dentro de la bola.



$Gráfico\ 3.1.1$

Considerando el cuadrante positivo



$Gráfico$ 3.1.2

Así, se concluye que g es convexa en el cuadrante no negativo. La función f toma valores positivos para ambas variables no negativas y distintas de cero, así que es cóncava en el cuadrante no negativo. Así que este problema es aplicable al Teorema de suficiencia de Kuhn-Tucker.

Para aplicar el Teorema de suficiencia de Kuhn-Tucker, deben cumplirse ciertas especificaciones de concavidad y convexidad bastante estrictas. El siguiente teorema relaja las condiciones estrictas del Teorema 3.1.1, hablando así de la cuasiconcavidad y cuasiconvexidad.

Teorema 3.1.2: El Teorema de suficiencia de Arrow-Enthoven. La Programación Cuasicóncava[iv]
En el Teorema de Suficiencia de Arrow-Enthoven se relajan estas especificaciones de la concavidad y la convexidad hasta requerir la cuasiconcavidad y la cuasiconvexidad de la función objetivo y de las funciones de restricción. Usaremos la desigualdad menor o igual en las restricciones de un problema de maximización y la desigualdad mayor o igual en el problema de minimización.

Dado el problema de optimización

$$Maximizar\ f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Sujeto a

$g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_i$, Para $i = 1,2, \dots, k$

Con $x_j \geq 0$ para todo $j = 1,2, \dots, n$

Si se satisfacen las siguientes condiciones:

1. La función objetivo $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ es diferenciable y cuasicóncava en el cuadrante n-dimensional positivo.
2. Cada función de restricción $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ es diferenciable y cuasiconvexa en el cuadrante n-dimensional positivo.
3. El punto $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ satisface las condiciones de Kuhn-Tucker.
4. Se satisface cualquiera de los siguientes puntos:
   i) $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) < 0$

ii) $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) > 0$, para alguna variable x_j que adopte un valor positivo sin oponerse a las restricciones.

iii) Las n derivadas de $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ no son todas cero, y la función $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ es $C^2(R^n)$ en la vecindad de $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ (todas las derivadas parciales de segundo orden de $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ existen para $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$

iv) La función $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ es cóncava.

Entonces, $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ da un máximo global de $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

El teorema de Arrow-Enthoven puede adaptarse con facilidad al problema de minimización. Tenemos que intercambiar las palabras cuasicóncavo y cuasiconvexo en las condiciones 1 y 2, reemplazar las condiciones de Kuhn-Tucker por las condiciones mínimas, invertir las desigualdades en las condiciones 4-i y 4-ii y cambiar la palabra cóncavo por convexo en 4-iv.

Ejemplo 3.1.2

Aplicaremos el Teorema de Suficiencia de Arrow-Enthoven para el siguiente problema de optimización

$$Maximizar\ f(x_1, x_2) = x_1$$

Sujeto a

$$x_1^2 + x_2^2 \leq 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Condición 1

La función f

$$f(x_1, x_2) = x_1$$

Está restringida por la función

$$g(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

Formamos la matriz $\overline{H}$. Las derivadas parciales son

$$\frac{\partial g}{\partial x_1} = 2x_1$$

$$\frac{\partial g}{\partial x_2} = 2x_2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = 0$$

$$\bar{H} = \begin{pmatrix} 0 & 2x_1 & 2x_2 \\ 2x_1 & 0 & 0 \\ 2x_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Los menores principales son

$$|\bar{H}_1| = \begin{vmatrix} 0 & 2x_1 \\ 2x_1 & 0 \end{vmatrix} = -4x_1^2 < 0$$

$$|\bar{H}_2| = \begin{vmatrix} 0 & 2x_1 & 2x_2 \\ 2x_1 & 0 & 1 \\ 2x_2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Así, la matriz $\bar{H}$ es semidefinida negativa en R^2 y f es una función cuasicóncava en R^2.

Observación: La gráfica de f es un plano. Por el teorema de la función lineal (Teorema 2.3.3), f es cuasicóncava y cuasiconvexa al mismo tiempo.

Condición 2

La función g es

$$g(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

Formamos la matriz de segundas derivadas $D^2 g(x_1, x_2)$. Las derivadas parciales son

$$\frac{\partial g}{\partial x_1} = 2x_1$$

$$\frac{\partial g}{\partial x_2} = 2x_2$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} = 2$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2} = 2$$

$$D^2 g(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Los menores principales son

$$|2| = 2 > 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$$

Así, $D^2 g(x_1, x_2)$ es definida positiva en R^2 y g una función cuasiconvexa estricta (convexa) en R^2.

Condición 3

La función de restricción g es una circunferencia de centro en el origen y de radio 1. Nos interesa el cuadrante positivo y como la gráfica de la función f es un plano, entonces los puntos en el cuadrante positivo satisfacen las condiciones de Kuhn-Tucker. Hay puntos que están en el cuadrante positivo, dentro de la circunferencia y sobre el plano.

Condición 4

Las derivadas parciales de primer orden de la función f son

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0$$

No son todas nulas para cualquier valor de (x_1, x_2), así que se cumple la condición 4-iii. Así este problema de optimización es aceptable para el Teorema de Suficiencia de Arrow-Enthoven.

Teorema 3.1.3: Prueba de calificación de la restricción
Si todas las funciones de restricción son lineales, entonces se satisface la condición de calificación de la restricción. Sin embargo, en el caso de que las funciones $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sean no lineales, la siguiente prueba ofrecida por Arrow-Enthoven puede resultar útil para determinar si se satisface la calificación de la restricción.

En un problema de maximización, si:

1. Cada función de restricción $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ es diferenciable y cuasiconvexa.
2. Existe un punto $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ en el cuadrante n-dimensional positivo tal que todas las restricciones se satisfacen como desigualdades estrictas para $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$.
3. Una de las siguientes proposiciones es verdadera:
   I. Cada una de las funciones $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ es convexa.
   II. Las derivadas parciales de cada $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ no son todas cero cuando se evalúan para cada punto $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ en la región factible.

Entonces, se satisface la calificación de la restricción.

Esta prueba puede adaptarse al problema de minimización, cambiando las palabras cuasiconvexo por cuasicóncavo en la condición 1 y la palabra convexo a cóncavo en la condición 3-i.

Ejemplo 3.1.3
Dado el problema de optimización:

$$Maximizar\ f(x_1, x_2) = x_1$$

Sujeto a

$$x_1^2 + x_2^2 \leq 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

La función g es

$$g(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

Formamos la matriz de segundas derivadas $D^2g(x_1; x_2)$. Las derivadas parciales son

$$\frac{\partial g}{\partial x_1} = 2x$$

$$\frac{\partial g}{\partial x_2} = 2y$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} = 2$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2} = 2$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 g}{\partial x_2 \partial x_1} = 0$$

$$D^2g(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La matriz de segundas derivadas $D^2g(x_1, x_2)$ es definida positiva y g es una función convexa. Con esto se cumple la condición 4-i y como la convexidad estricta implica la cuasiconvexidad, se cumple la condición 1 de la calificación de la restricción.

La función g es una circunferencia de centro en el origen y de radio 1, cuyo dominio es dentro de la misma y como la gráfica de f es un plano, hay puntos (x_1, x_2) que están en el cuadrante positivo que cumplen con las condiciones. Entonces se cumple con la calificación de restricción.

<u>Teorema 3.1.4: Teorema de Weierstrass</u>[v]
Si la función objetivo f es continua y el conjunto de restricciones nos queda que optimizamos sobre un conjunto compacto, entonces f alcanza extremos absolutos (Máximo y mínimo global).

<u>Definición 3.2.1</u>
Un conjunto es compacto si es cerrado y acotado.

3.2 Programación Cóncava y Programación no Lineal

En esta sección se desarrollará como es la relación entre la Programación no Lineal y la Programación Cóncava a partir de un ejemplo integrador de maximización. Los temas vistos en los capítulos y secciones anteriores servirán para llegar a una conclusión y darle cierre a la Primera Parte. Este es el motivo por el cual se trató por separado la Programación no Lineal y la Programación Cóncava. Una vez definida la relación entre los dos tipos de programación se procederá a aplicarlos a un modelo económico de producción, que será desarrollado en la Segunda Parte.

Ejemplo 3.2.1: Ejemplo integrador

El problema de optimización es

$$Maximizar\ f(x_1,x_2) = -2x_1^2 - 4x_2^2 + 64x_1 + 96x_2 - 13$$

Sujeto a

$$x_1 + x_2 \leq 36$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Programación no Lineal

Al resolver el problema de optimización por medio del método de Kuhn-Tucker, se tiene los puntos críticos siguientes:

$$P = (16{,}12)$$

$$P = (0{,}0)$$

$$P = (0{,}12)$$

$$P = (16{,}0)$$

Al evaluarlos en la función objetivo, se tiene

$$f = 1075$$

$$f = -13$$

$$f = 563$$

$$f = 499$$

Para cada punto crítico mencionado, respectivamente. Como tenemos que maximizar, entonces el punto

$$P = (16{,}12)$$

Es el máximo.

Teorema de Weierstrass

La restricción del problema de optimización es

$$x_1 + x_2 \leq 36$$

Despejo x_2 y obtengo

$$x_2 \leq 36 - x_1$$

Que es una función lineal en R^2 y da como resultado un conjunto cerrado. Dado que las variables x_1, x_2 deben ser mayores o iguales a cero, eso da como resultado el conjunto de x_1, x_2 en el primer cuadrante en R^2. Así, el conjunto de restricciones será compacto, con lo cual se cumple el Teorema de Weierstrass y la función f alcanzará un extremo absoluto. Por último queda aplicar la Programación Cóncava al ejemplo.

Programación Cóncava

Las funciones que tengo son:

$$f(x_1;x_2) = -2x_1^2 - 4x_2^2 + 64x_1 + 96x_2 - 13$$

$$g(x_1,x_2) = x_1 + x_2$$

Se utilizara la matriz B debido a que satisface las condiciones suficientes para la concavidad.

Función f

$$f(x_1,x_2) = -2x_1^2 - 4x_2^2 + 64x_1 + 96x_2 - 13$$

Formamos la matriz B.Las derivadas parciales son

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = -4x_1 + 64$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = -8x_2 + 96$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = -4$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = -8$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = 0$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -4x_1 + 64 & -8x_2 + 96 \\ -4x_1 + 64 & -4 & 0 \\ -8x_2 + 96 & 0 & -8 \end{pmatrix}$$

Los menores principales son

$$|\overline{B_1}| = \begin{vmatrix} 0 & -4x_1 + 64 \\ -4x_1 + 64 & -4 \end{vmatrix} = -(-4x_1 + 64)^2 < 0$$

$$|\overline{B_2}| = \begin{vmatrix} 0 & -4x_1 + 64 & -8x_2 + 96 \\ -4x_1 + 64 & -4 & 0 \\ -8x_2 + 96 & 0 & -8 \end{vmatrix} = 8(-4x_1 + 64)^2 + 4(-8x_2 + 96)^2 > 0$$

Así, B es definida negativa en R^2 y f es una función cuasicóncava estricta (Cóncava) en R^2.

Otra forma de definir a la función f es utilizando la matriz $\overline{H}$ que cumple con las condiciones de la maximización restringida. Para armar la matriz $\overline{H}$ necesito las derivadas parciales de primer orden de la función de restricción g

Derivadas de g

$$\frac{\partial g}{\partial x_1} = 1$$

$$\frac{\partial g}{\partial x_2} = 1$$

Así, juntando las derivadas segundas de la función objetivo f y las derivadas primeras de la función de restricción g obtengo la matriz $\overline{H}$

$$\overline{H} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & -8 \end{pmatrix}$$

Los menores principales son

$$|\overline{H_1}| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -1 < 0$$

$$|\overline{H_2}| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & -8 \end{vmatrix} = 12 > 0$$

Así, la matriz $\overline{H}$ es definida negativa, con lo cual f es cóncava. Además, f no tiene ninguna restricción en su dominio, por lo tanto es diferenciable para todos los pares de (x_1, x_2).

Conclusión de la primer parte

Conocer la concavidad y la convexidad de la función objetivo y de las funciones de restricción, así como la caracterización de la concavidad y la convexidad con respecto a que sean en forma estricta o no estricta, nos permite saber si la función objetivo f tiene un máximo global o mínimo global. Esta es la relación entre la programación cóncava y la programación no lineal. La programación cóncava nos sirve para confirmar lo realizado en el cálculo de obtener los puntos críticos, mediante la técnica de Kuhn-Tucker al hacer el reemplazo en la función objetivo, y decidir cuáles de los puntos críticos hallados, que cumplen con las condiciones de Kuhn-Tucker, son máximos o mínimos globales.

La programación cóncava brinda información sobre la existencia de un máximo o mínimo global tal como el Teorema de Weierstrass, en el cual se utiliza las funciones de restricción. La programación no lineal permite conocer cuál es ese máximo o mínimo global de la función objetivo f. Ambos tipos de programaciones deben ser consistentes entre sí con el Teorema de Weierstrass. Más específicamente, si una función objetivo f es cóncava en sentido estricto, es porque la matriz Hessiana $\overline{H}$ es definida negativa, con lo cual se tiene que f alcanzara un máximo global en el cuadrante positivo.

Robledo, Yonathan Ariel.
Licenciatura en Economía, EEyN UNSAM.

Segunda parte: Aplicación de la Programación Cóncava y Programación no Lineal en modelos económicos

En esta segunda parte se aplicaran las técnicas de programación cóncava y programación no lineal, en modelos económicos simples, con el objetivo de sacar conclusiones sobre las soluciones a los problemas de optimización de tales modelos económicos, tomando como base el interrogante ¿Qué sucederá con la solución del modelo si?

1. Cambia la función objetivo.
2. Aplicamos restricciones al modelo en cuestión
3. Enfrentamos el caso convexo y no convexo en el conjunto de restricciones

Para responder esta pregunta planteada, nos enfocaremos en un modelo económico en el que una empresa deberá comportarse de diferentes formas debido a una nueva situación dada en la economía, reestructurando su producción y la cantidad de insumos necesarios para lograr tal producción, cualquiera sea la situación en la economía.

Modelo económico

El modelo económico se basara en una empresa que es productora de desodorantes de ambientes que utiliza dos insumos variables, a saber, Químicos y plásticos. Sin embargo, la empresa se tiene que enfrentar a una nueva situación económica dada por una pandemia generada por el nuevo Coronavirus. Suponemos que, en un principio, esta situación restringe la cantidad de insumos que utiliza la empresa para dicha producción de desodorantes de ambientes y que luego, al haber medidas restrictivas por la nueva pandemia, la empresa se ve obligada a cambiar su estructura productiva para evitar su quiebre, dada por la baja demanda de desodorantes de ambientes provocada por la cuarentena preventiva, adaptándose a la nueva situación siendo productora de alcohol en gel con los mismos insumos que utilizaba para los desodorantes de ambientes.

Supuestos del modelo

1. La empresa utilizará como insumos químicos y plástico. Por simplicidad, se entiende por químicos como el líquido del contenido del producto y se entiende por plástico al envase con rociador.
2. Hay 3 situaciones en la economía generadas por esta nueva pandemia.
   Situación 1: Antes de la aplicación de la cuarentena voluntaria: En esta situación no hay restricciones a la utilización de insumos para la fabricación de desodorantes de ambiente.
   Situación 2: Después de la aplicación de la cuarentena voluntaria y antes de la aplicación de la cuarentena obligatoria: Se restringe la utilización de insumos para la fabricación de desodorantes de ambientes por la alta demanda de alcohol en gel, para combatir el Coronavirus.
   Situación 3: Después de la aplicación de la cuarentena obligatoria: Esta situación es mucho más restrictiva a la situación anterior y obliga a la empresa a cambiar su producción como estrategia para evitar una quiebra dada por la nula demanda de desodorantes de ambientes. La empresa se dedicara a la producción de alcohol en gel.

3. La producción de desodorantes de ambientes se modela mediante una función de rendimientos decrecientes a escala, y la producción de alcohol en gel mediante una función de rendimientos constantes a escala. Esto es porque ambas funciones son cóncavas, lo cual implica que la función objetivo sea cóncava, dado que la función de costos es lineal. Las estructuras productivas se diferencian por los rendimientos a escala distintos.
4. El desodorante de ambientes y el alcohol en gel utilizaran los mismos insumos para su producción, a fin de simplificar el modelo.
5. El precio de venta del desodorante de ambientes será de p y el precio de venta del alcohol en gel será de $\frac{3}{2}p$, un 50% más caro que el desodorante de ambientes.
6. El precio de los insumos serán de w_1 para el insumo químico y w_2 el precio del insumo plástico. Por simplicidad en los cálculos, se supone que $w_1 = w_2 = w$. Luego de aplicada la cuarentena obligatoria, los precios pasaran a ser de $\frac{3}{2}w$, o sea, un aumento del 50% en el precio de ambos insumos.
7. El precio de venta de los desodorantes de ambiente y del alcohol en gel vienen dados, al igual que el precio de los insumos químicos y plástico.
8. El químico y el plástico se miden en Kg y no en Lts para tener todos los insumos en la misma unidad de medida.
9. Hay un cambio en el conjunto de restricciones. En la situación 2, la restricción de insumos es c. En la situación 3 la restricción de insumos pasará a ser kc, con $k > 1$ por tratarse de una situación en la cual hay una alta demanda de alcohol en gel. Se supone $k > 1$ para reflejar que se necesitan más insumos en la emergencia sanitaria.

Programación no Lineal aplicada al modelo

Situación 1: Antes de la aplicación de la cuarentena voluntaria

La empresa produce desodorantes de ambientes con un precio de venta de p, cuyos insumos son químicos y plástico, ambos con un precio de w por Kg. En esta situación, la estructura productiva de la empresa está dada por la función de producción con rendimientos decrecientes

$f(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{\beta}, \alpha + \beta < 1, \alpha < 1, \beta < 1$

Donde

x_1 Es el químico.

x_2 Es el plástico.

La función de costos es

$$C(x_1, x_2) = w_1 x_1 + w_2 x_2$$

La función de beneficios es

$$\pi = p x_1^{\alpha} x_2^{\beta} - w_1 x_1 - w_2 x_2$$

El problema de optimización es

$$Maximizar\ \pi = p x_1^{\alpha} x_2^{\beta} - w_1 x_1 - w_2 x_2$$

Sujeto a

$$x_1, x_2 \geq 0$$

La función Lagrangiana es

$$L = px_1^{\alpha}x_2^{\beta} - w_1x_1 - w_2x_2 - \lambda_1(-x_1) - \lambda_2(-x_2)$$

Las condiciones de Kuhn-Tucker son

$$\frac{\partial \pi}{\partial x_1} = p\alpha x_1^{\alpha-1}x_2^{\beta} - w_1 \leq 0, x_1 \geq 0, x_1\left(p\alpha x_1^{\alpha-1}x_2^{\beta} - w_1\right) = 0$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial x_2} = p\beta x_1^{\alpha}x_2^{\beta-1} - w_2 \leq 0, x_2 \geq 0, x_2\left(p\beta x_1^{\alpha}x_2^{\beta-1} - w_2\right) = 0$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial \lambda_1} = x_1 \geq 0, \lambda_1 \geq 0, \lambda_1 x_1 = 0$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial \lambda_2} = x_2 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \lambda_2 x_2 = 0$$

$w_1 = w_2$ Así que llamo $w_1 = w_2 = w$ para simplificar los cálculos.

Realizando operaciones algebraicas, como en el capítulo 1, se concluye que la solución es

$$x_1 = (\frac{w}{p\alpha^{1-\beta}\beta^{\beta}})^{\frac{1}{\alpha+\beta-1}}$$

$$x_2 = (\frac{w}{p\alpha^{\alpha}\beta^{1-\alpha}})^{\frac{1}{\alpha+\beta-1}}$$

Que arroja un beneficio de

$$\pi_1 = \frac{w^{\frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta-1}}}{p^{\frac{1}{\alpha+\beta-1}}\alpha^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta-1}}\beta^{\frac{\beta}{\alpha+\beta-1}}} - w\left[\left(\frac{w}{p\alpha^{1-\beta}\beta^{\beta}}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta-1}} + \left(\frac{w}{p\alpha^{\alpha}\beta^{1-\alpha}}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta-1}}\right]$$

La empresa deberá utilizar $(\frac{w}{p\alpha^{1-\beta}\beta^{\beta}})^{\frac{1}{\alpha+\beta-1}}$ Kg de químicos y $(\frac{w}{p\alpha^{\alpha}\beta^{1-\alpha}})^{\frac{1}{\alpha+\beta-1}}$ Kg de plástico a fin de maximizar sus beneficios y producirá

$$y = \frac{w^{\frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta-1}}}{p^{\frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta-1}}\alpha^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta-1}}\beta^{\frac{\beta}{\alpha+\beta-1}}}$$

Desodorantes de ambientes con tales insumos.

El problema de optimización de esta situación 1 también puede ser resuelto por extremos libres igualando a cero las derivadas parciales de la función de beneficio, dado que no hay una función de restricción $g(x_1, x_2)$. Sin embargo, se debe suponer que la solución del problema es una solución interior.

Robledo, Yonathan Ariel.
Licenciatura en Economía, EEyN UNSAM.

Situación 2: Después de la aplicación de la cuarentena voluntaria y antes de la aplicación de la cuarentena obligatoria

En esta situación se restringirá la utilización de los insumos variables, debido a la alta demanda de alcohol en gel, que necesita los mismos insumos, como se supuso, para lograr frenar la propagación del Coronavirus. Tal restricción consiste en utilizar a lo sumo c Kg entre químicos y plásticos en el proceso productivo de los desodorantes de ambientes. Por otro lado, se tiene que el precio de los insumos sigue siendo de w por Kg para los químicos y para el plástico. Así, el problema de optimización, dada la misma función de producción, de rendimientos decrecientes a escala, y los mismos precios de venta y precios de los insumos, es

$$Maximizar\ \pi = px_1^{\alpha}x_2^{\beta} - w_1x_1 - w_2x_2$$

Sujeto a

$$x_1 + x_2 \leq c$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Donde

x_1 Es el químico.

x_2 Es el plástico.

La función Lagrangiana es

$$L = px_1^{\alpha}x_2^{\beta} - w_1x_1 - w_2x_2 - \lambda(x_1 + x_2 - c)$$

Las condiciones de Kuhn-Tucker son

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = p\alpha x_1^{\alpha-1}x_2^{\beta} - w_1 - \lambda \leq 0, x_1 \geq 0, x_1\left(p\alpha x_1^{\alpha-1}x_2^{\beta} - w_1 - \lambda\right) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = p\beta x_1^{\alpha}x_2^{\beta-1} - w_2 - \lambda, x_2 \geq 0, x_2\left(p\beta x_1^{\alpha}x_2^{\beta-1} - w_2 - \lambda\right) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = c - x_1 - x_2 \geq 0, \lambda \geq 0, \lambda(c - x_1 - x_2) = 0$$

Encontramos 2 puntos críticos.

Caso $x_1 > 0, x_2 > 0, \lambda > 0$

$$\begin{cases} p\alpha x_1^{\alpha-1}x_2^{\beta} - w_1 - \lambda = 0 \\ p\beta x_1^{\alpha}x_2^{\beta-1} - w_2 - \lambda = 0 \\ c - x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

Igualo λ

$$p\alpha x_1^{\alpha-1}x_2^{\beta} - w_1 = p\beta x_1^{\alpha}x_2^{\beta-1} - w_2$$

$w_1 = w_2$ Así que llamo $w_1 = w_2 = w$ para simplificar los cálculos

$$p\alpha x_1^{\alpha-1}x_2^{\beta} = p\beta x_1^{\alpha}x_2^{\beta-1}$$

Realizando operaciones algebraicas se llega a

$$x_1 = \frac{\alpha c}{\alpha+\beta}$$

$$x_2 = \frac{\beta c}{\alpha+\beta}$$

$$\lambda = p(\frac{c}{\alpha+\beta})^{\alpha+\beta-1}\alpha^{\alpha}\beta^{\beta} - w$$

Que arroja un beneficio de

$$\pi_2 = \frac{pc^{\alpha+\beta}\alpha^{\alpha}\beta^{\beta}}{(\alpha+\beta)^{\alpha+\beta}} - wc$$

Caso $x_1 > 0, x_2 > 0, \lambda = 0$

En este caso x_1 y x_2 son iguales a la situación 1, debido a que la restricción es no activa.

$$x_1 = (\frac{w}{p\alpha^{1-\beta}\beta^{\beta}})^{\frac{1}{\alpha+\beta-1}}$$

$$x_2 = (\frac{w}{p\alpha^{\alpha}\beta^{1-\alpha}})^{\frac{1}{\alpha+\beta-1}}$$

$$\lambda = 0$$

Que arroja un beneficio de

$$\pi_2 = \pi_1 = \frac{w^{\frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta-1}}}{p^{\frac{1}{\alpha+\beta-1}}\alpha^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta-1}}\beta^{\frac{\beta}{\alpha+\beta-1}}} - w\left[\left(\frac{w}{p\alpha^{1-\beta}\beta^{\beta}}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta-1}} + \left(\frac{w}{p\alpha^{\alpha}\beta^{1-\alpha}}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta-1}}\right]$$

Así, en la situación 2, cuando la cuarentena está instalada, la empresa producirá

$$y = \frac{c^{\alpha+\beta}\alpha^{\alpha}\beta^{\beta}}{(\alpha+\beta)^{\alpha+\beta}}$$

Desodorantes de ambientes, con $x_1 = \frac{\alpha c}{\alpha+\beta}$ Kg de químicos y con $x_2 = \frac{\beta c}{\alpha+\beta}$ Kg de plástico. Sin embargo, esta producción se da cuando la restricción $x_1 + x_2 \leq c$ es activa. Si tal restricción es no activa, la producción de desodorantes de ambientes y los beneficios serán los mismos que en la situación 1

$$y = \frac{w^{\frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta-1}}}{p^{\frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta-1}}\alpha^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta-1}}\beta^{\frac{\beta}{\alpha+\beta-1}}}$$

Con $(\frac{w}{p\alpha^{1-\beta}\beta^{\beta}})^{\frac{1}{\alpha+\beta-1}}$ Kg de químicos y con $(\frac{w}{p\alpha^{\alpha}\beta^{1-\alpha}})^{\frac{1}{\alpha+\beta-1}}$ Kg de plástico.

Robledo, Yonathan Ariel.
Licenciatura en Economía, EEyN UNSAM.

Situación 3: Después de la aplicación de la cuarentena obligatoria

Ahora se ha restringido aún más la cuarentena llegado a tal punto de hacerla obligatoria para todos. La empresa que antes era productora de desodorantes de ambientes, ahora es productora de alcohol en gel, utilizando los mismos insumos, químicos y plástico, aunque el precio de estos insumos aumentaron un 50% siendo $\frac{3}{2}w$ por Kg y el precio de venta del alcohol en gel también aumento un 50% pasando a ser de $\frac{3}{2}p$. Dado que la empresa produce alcohol en gel, la restricción de insumos pasa de c kg a kc Kg, con $k > 1$ por tratarse de un producto esencial para combatir la pandemia. La nueva función de producción de la empresa, ahora con rendimientos constantes a escala, es

$f(x_1, x_2) = x_1^\alpha x_2^\beta, \alpha + \beta = 1, \alpha < 1, \beta < 1$

Donde

x_1 Es el químico.

x_2 Es el plástico.

La función de costos es

$$C(x_1, x_2) = \frac{3}{2}w_1 x_1 + \frac{3}{2}w_2 x_2$$

La función de beneficios es

$$\pi = \frac{3}{2}p x_1^\alpha x_2^\beta - \frac{3}{2}w_1 x_1 - \frac{3}{2}w_2 x_2$$

El problema de optimización es

$$Maximizar\ \pi = \frac{3}{2}p x_1^\alpha x_2^\beta - \frac{3}{2}w_1 x_1 - \frac{3}{2}w_2 x_2$$

Sujeto a las restricciones

$$x_1 + x_2 \leq kc$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

La función lagrangiana es

$$L = \frac{3}{2}p x_1^\alpha x_2^\beta - \frac{3}{2}w_1 x_1 - \frac{3}{2}w_2 x_2 - \lambda(x_1 + x_2 - kc)$$

Las condiciones de Kuhn-Tucker son

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{3}{2}p\alpha x_1^{\alpha-1} x_2^\beta - \frac{3}{2}w_1 - \lambda \leq 0, x_1 \geq 0, x_1\left(\frac{3}{2}p\alpha x_1^{\alpha-1} x_2^\beta - \frac{3}{2}w_1 - \lambda\right) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = \frac{3}{2}p\beta x_1^\alpha x_2^{\beta-1} - \frac{3}{2}w_2 - \lambda, x_2 \geq 0, x_2\left(\frac{3}{2}p\beta x_1^\alpha x_2^{\beta-1} - \frac{3}{2}w_2 - \lambda\right) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = -x_1 - x_2 + kc \geq 0, \lambda \geq 0, \lambda(-x_1 - x_2 + kc) = 0$$

$w_1 = w_2$ Así que llamo $w_1 = w_2 = w$ para simplificar los cálculos

Realizando operaciones algebraicas, como en el capítulo 1, se concluye que la solución es

$$x_1 = k\alpha c$$

$$x_2 = k\beta c$$

$$\lambda = \frac{3}{2}p\alpha^{\alpha}\beta^{\beta} - \frac{3}{2}w$$

Que arroja un beneficio de

$$\pi_3 = \frac{3}{2}kc(p\alpha^{\alpha}\beta^{\beta} - w)$$

En esta situación, dado que hay rendimientos constantes a escala, se llega a un absurdo si no activo la restricción, porque x_1 y x_2 serian como en la situación 1, que tienen exponentes con denominador $\alpha + \beta - 1$.

Así, en la situación 3, cuando la cuarentena pasó a ser obligatoria, la empresa utilizara $k\alpha c$ Kg de químicos y $k\beta c$ Kg de plástico a fin de maximizar sus beneficios. Con esas cantidades de insumos se fabricaran

$$y = kc\alpha^{\alpha}\beta^{\beta}$$

Alcohol en gel. Además, en esta situación no se puede volver a la situación 1, antes de la cuarentena, debido a los rendimientos constantes a escala de la función de producción. Una vez que la cuarentena es más restrictiva, ya no se puede volver a la normalidad, hasta tanto se solucionen los problemas sanitarios. Es así como la empresa modifica su estructura productiva, adaptándose a la nueva situación dada por el Coronavirus.

La empresa va a querer producir alcohol en gel dado que va a obtener mayores beneficios

$$\pi_3 > \pi_2$$

$$\frac{3}{2}kc(p\alpha^{\alpha}\beta^{\beta} - w) > \frac{pc^{\alpha+\beta}\alpha^{\alpha}\beta^{\beta}}{(\alpha+\beta)^{\alpha+\beta}} - wc$$

Por otro lado, no tiene sentido no activar la restricción $x_1 + x_2 \leq c$ de la segunda situación porque la idea es racionar los insumos químicos y plásticos para la producción del alcohol en gel con el fin de combatir la pandemia. Además no se demandará desodorantes de ambientes, sino que se demandarán productos claves para combatir la pandemia, como el alcohol en gel. Así se muestra que la empresa se adaptara a la nueva situación y producirá alcohol en gel. En esta situación 3, lo interesante es que la cantidad óptima de insumos que la empresa utiliza para la producción, el nivel de producción y los beneficios dependen de la constante k. Esto tiene sentido porque al aumentar la restricción de insumos, se puede producir más alcohol en gel. El multiplicador λ no depende de la constante k debido a los rendimientos constantes a escala.

Una vez analizados las 3 situaciones, nos enfocaremos en ver qué sucede con la solución del problema de optimización cuando cambian las restricciones y si estas restricciones son convexas o no.

Cambios en el conjunto de restricciones de la situación 2

Responderemos la siguiente pregunta ¿Qué pasaría si el conjunto de restricciones en la segunda situación fuese como el conjunto de restricciones de la tercera situación? ¿La empresa seguirá produciendo desodorantes de ambientes dada la ampliación en la restricción sobre la utilización de químicos y plásticos en la producción?

El problema de optimización es

$$Maximizar\ \pi = px_1^{\alpha}x_2^{\beta} - w_1x_1 - w_2x_2$$

Sujeto a

$$x_1 + x_2 \leq kc$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Donde

x_1 Es el químico.

x_2 Es el plástico.

$$\alpha + \beta < 1$$

$$\alpha < 1$$

$$\beta < 1$$

La función Lagrangiana es

$$L = px_1^{\alpha}x_2^{\beta} - w_1x_1 - w_2x_2 - \lambda(x_1 + x_2 - kc)$$

Las condiciones de Kuhn-Tucker son

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = p\alpha x_1^{\alpha-1}x_2^{\beta} - w_1 - \lambda \leq 0, x_1 \geq 0, x_1\left(p\alpha x_1^{\alpha-1}x_2^{\beta} - w_1 - \lambda\right) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = p\beta x_1^{\alpha}x_2^{\beta-1} - w_2 - \lambda, x_2 \geq 0, x_2\left(p\beta x_1^{\alpha}x_2^{\beta-1} - w_2 - \lambda\right) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = kc - x_1 - x_2 \geq 0, \lambda \geq 0, \lambda(kc - x_1 - x_2) = 0$$

Encontramos 2 puntos críticos.

Caso $x_1 > 0, x_2 > 0, \lambda > 0$

$$\begin{cases} p\alpha x_1^{\alpha-1}x_2^{\beta} - w_1 - \lambda = 0 \\ p\beta x_1^{\alpha}x_2^{\beta-1} - w_2 - \lambda = 0 \\ kc - x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

Igualo λ

$$p\alpha x_1^{\alpha-1}x_2^{\beta} - w_1 = p\beta x_1^{\alpha}x_2^{\beta-1} - w_2$$

$w_1 = w_2$ Así que llamo $w_1 = w_2 = w$ para simplificar los cálculos

$$p\alpha x_1^{\alpha-1}x_2^{\beta} = p\beta x_1^{\alpha}x_2^{\beta-1}$$

Realizando operaciones algebraicas se llega a

$$x_1 = \frac{k\alpha c}{\alpha+\beta}$$

$$x_2 = \frac{k\beta c}{\alpha+\beta}$$

$$\lambda = \frac{pk^{\alpha+\beta-1}\alpha^{\alpha}\beta^{\beta}c^{\alpha+\beta-1}}{(\alpha+\beta)^{\alpha+\beta-1}} - w$$

Que arroja un beneficio de

$$\pi_2{}' = \frac{pk^{\alpha+\beta}\alpha^{\alpha}\beta^{\beta}c^{\alpha+\beta}}{(\alpha+\beta)^{\alpha+\beta}} - kwc$$

Caso $x_1 > 0, x_2 > 0, \lambda = 0$

En este caso x_1 y x_2 son iguales a la situación 1, debido a que la restricción es no activa.

$$x_1 = (\frac{w}{p\alpha^{1-\beta}\beta^{\beta}})^{\frac{1}{\alpha+\beta-1}}$$

$$x_2 = (\frac{w}{p\alpha^{\alpha}\beta^{1-\alpha}})^{\frac{1}{\alpha+\beta-1}}$$

$$\lambda = 0$$

Que arroja un beneficio de

$$\pi_1 = \pi_2{}' = \frac{w^{\frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta-1}}}{p^{\frac{1}{\alpha+\beta-1}}\alpha^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta-1}}\beta^{\frac{\beta}{\alpha+\beta-1}}} - w\left[\left(\frac{w}{p\alpha^{1-\beta}\beta^{\beta}}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta-1}} + \left(\frac{w}{p\alpha^{\alpha}\beta^{1-\alpha}}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta-1}}\right]$$

Como en la situación 1, antes de la aplicación de la cuarentena voluntaria.

La empresa deberá modificar su estructura productiva dada la cuarentena voluntaria. Las fuerzas del mercado harán que la empresa produzca alcohol en gel utilizando los mismos insumos, que son químicos y plásticos. Esto es lo que comentamos al final de la situación 3, antes de entrar en este caso. A diferencia de la situación 3, debido a los rendimientos decrecientes a escala de la función de producción, el multiplicador λ depende de la constante k.

Conjunto de restricciones no convexo en la situación 3
Apliquemos una restricción cóncava, por ejemplo, la función

$g(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_2^2$

Al problema de maximización correspondiente a la situación 3 en reemplazo de la restricción de insumos que era

$x_1 + x_2 \leq kc$

Correspondiente a la función objetivo

$$\pi = \frac{3}{2}px_1^{\alpha}x_2^{\beta} - \frac{3}{2}w_1x_1 - \frac{3}{2}w_2x_2$$

Donde

$$\alpha + \beta = 1$$

$$\alpha < 1$$

$$\beta < 1$$

La pregunta es ¿Cómo repercute la introducción de una función no convexa, en el conjunto de restricciones, a la contratación de insumos por parte de la empresa?

El problema de optimización es

$$Maximizar\ \pi = \frac{3}{2}px_1^{\alpha}x_2^{\beta} - \frac{3}{2}w_1x_1 - \frac{3}{2}w_2x_2$$

Sujeto a

$$-x_1^2 - x_2^2 \leq -h$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Donde

x_1 Es el químico.

x_2 Es el plástico.

$h < 0$ Es la cota del paraboloide $g(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_2^2$

La función Lagrangiana es

$$L = \frac{3}{2}px_1^{\alpha}x_2^{\beta} - \frac{3}{2}w_1x_1 - \frac{3}{2}w_2x_2 - \lambda(-x_1^2 - x_2^2 + h)$$

Las condiciones de Kuhn-Tucker son

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}=\frac{3}{2}p\alpha x_1^{\alpha-1}x_2^{\beta}-\frac{3}{2}w_1+2x_1\lambda\leq 0, x_1\geq 0, x_1\left(\frac{3}{2}p\alpha x_1^{\alpha-1}x_2^{\beta}-\frac{3}{2}w_1+2x_1\lambda\right)=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2}=\frac{3}{2}p\beta x_1^{\alpha}x_2^{\beta-1}-\frac{3}{2}w_2+2x_2\lambda\leq 0, x_2\geq 0, x_2\left(\frac{3}{2}p\beta x_1^{\alpha}x_2^{\beta-1}-\frac{3}{2}w_2+2x_2\lambda\right)=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=x_1^2+x_2^2-h\geq 0, \lambda\geq 0, \lambda(x_1^2+x_2^2-h)=0$$

Realizando operaciones algebraicas, como en el capítulo 1, se concluye que la solución es

$$x_1=0$$

$$x_2=0$$

$$\lambda=0$$

Que arroja un beneficio de

$$\pi_3{}'=0$$

Cuando maximizo beneficio con una restricción cóncava, resulta que la solución del problema no tiene sentido porque si justamente cambié mi estructura de producción para aportar a la lucha contra la pandemia, no producir alcohol en gel no ayuda en nada. Por otra parte, en un problema de maximización no puedo trabajar con un conjunto de restricciones cóncavo, eso es para los problemas de minimización, pero se mostró este resultado para apreciar que en el modelo planteado contradice lo que la empresa busca.

Programación Cóncava aplicada al modelo

Función de beneficios de la situación 1 y 2

$$\pi=px_1^{\alpha}x_2^{\beta}-w_1x_1-w_2x_2, \alpha+\beta<1, \alpha<1, \beta<1$$

Es la función objetivo en la situación 1. En la situación 2, la función objetivo está restringida por

$$g(x_1,x_2)=x_1+x_2$$

Formamos la matriz $\overline{H}$. Las derivadas parciales son

$$\frac{\partial g}{\partial x_1}=1$$

$$\frac{\partial g}{\partial x_2}=1$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial x_1}=p\alpha x_1^{\alpha-1}x_2^{\beta}-w_1$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial x_2}=p\beta x_1^{\alpha}x_2^{\beta-1}-w_2$$

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial x_1^2}=p\alpha(\alpha-1)x_1^{\alpha-2}x_2^{\beta}$$

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial x_2^2} = p\beta(\beta-1)x_1^{\alpha}x_2^{\beta-2}$$

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial x_1 x_2} = \frac{\partial^2 \pi}{\partial x_2 x_1} = p\alpha\beta x_1^{\alpha-1}x_2^{\beta-1}$$

$$\overline{H} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & p\alpha(\alpha-1)x_1^{\alpha-2}x_2^{\beta} & p\alpha\beta x_1^{\alpha-1}x_2^{\beta-1} \\ 1 & p\alpha\beta x_1^{\alpha-1}x_2^{\beta-1} & p\beta(\beta-1)x_1^{\alpha}x_2^{\beta-2} \end{pmatrix}$$

Los menores principales son

$$|\overline{H}_1| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & p\alpha(\alpha-1)x_1^{\alpha-2}x_2^{\beta} \end{vmatrix} = -1 < 0$$

$$|\overline{H}_2| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & p\alpha(\alpha-1)x_1^{\alpha-2}x_2^{\beta} & p\alpha\beta x_1^{\alpha-1}x_2^{\beta-1} \\ 1 & p\alpha\beta x_1^{\alpha-1}x_2^{\beta-1} & p\beta(\beta-1)x_1^{\alpha}x_2^{\beta-2} \end{vmatrix}$$
$$= 2p\alpha\beta x_1^{\alpha-1}x_2^{\beta-1} + p\beta(1-\beta)x_1^{\alpha}x_2^{\beta-2} + p\alpha(1-\alpha)x_1^{\alpha-2}x_2^{\beta} > 0$$

Así, $\overline{H}$ es definida negativa y π es una función cuasicóncava estricta (Cóncava).

Función de restricción de la situación 2 y 3

$$g(x_1, x_2) = x_1 + x_2$$

Es una función de restricción. La gráfica de g es un plano y por el teorema de la función lineal (Teorema 2.3.3) g es cuasicóncava y cuasiconvexa al mismo tiempo.

Función de beneficios de la situación 3

$$\pi = \frac{3}{2}px_1^{\alpha}x_2^{\beta} - \frac{3}{2}w_1x_1 - \frac{3}{2}w_2x_2, \alpha+\beta = 1, \alpha < 1, \beta < 1$$

Es la función objetivo en la situación 3, restringida por la función

$$g(x_1, x_2) = x_1 + x_2$$

Formamos la matriz $\overline{H}$. Las derivadas parciales son

$$\frac{\partial g}{\partial x_1} = 1$$

$$\frac{\partial g}{\partial x_2} = 1$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial x_1} = \frac{3}{2}p\alpha x_1^{\alpha-1}x_2^{\beta} - \frac{3}{2}w_1$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial x_2} = \frac{3}{2}p\beta x_1^{\alpha}x_2^{\beta-1} - \frac{3}{2}w_2$$

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial x_1^2} = \frac{3}{2}p\alpha(\alpha-1)x_1^{\alpha-2}x_2^{\beta}$$

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial x_2^2} = \frac{3}{2} p\beta(\beta - 1) x_1^{\alpha} x_2^{\beta - 2}$$

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial x_1 x_2} = \frac{\partial^2 \pi}{\partial x_2 x_1} = \frac{3}{2} p\alpha\beta x_1^{\alpha-1} x_2^{\beta-1}$$

$$\overline{H} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{3}{2} p\alpha(\alpha-1) x_1^{\alpha-2} x_2^{\beta} & \frac{3}{2} p\alpha\beta x_1^{\alpha-1} x_2^{\beta-1} \\ 1 & \frac{3}{2} p\alpha\beta x_1^{\alpha-1} X_2^{\beta-1} & \frac{3}{2} p\beta(\beta-1) x_1^{\alpha} x_2^{\beta-2} \end{pmatrix}$$

Los menores principales son

$$|\overline{H}_1| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \frac{3}{2} p\alpha(\alpha-1) x_1^{\alpha-2} x_2^{\beta} \end{vmatrix} = -1 < 0$$

$$|\overline{H}_2| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{3}{2} p\alpha(\alpha-1) x_1^{\alpha-2} x_2^{\beta} & \frac{3}{2} p\alpha\beta x_1^{\alpha-1} x_2^{\beta-1} \\ 1 & \frac{3}{2} p\alpha\beta x_1^{\alpha-1} x_2^{\beta-1} & \frac{3}{2} p\beta(\beta-1) x_1^{\alpha} x_2^{\beta-2} \end{vmatrix}$$
$$= 3p\alpha\beta x_1^{\alpha-1} x_2^{\beta-1} + \frac{3}{2} p\beta(1-\beta) x_1^{\alpha} x_2^{\beta-2} + \frac{3}{2} p\alpha(1-\alpha) x_1^{\alpha-2} x_2^{\beta} > 0$$

Así, $\overline{H}$ es semidefinida negativa y π es una función cuasicóncava estricta (Cóncava).

<u>Función de restricción no cóncava</u>

$$g(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_2^2$$

Es una función de restricción.

Formamos la matriz $D^2 g(x_1, x_2)$. Las derivadas parciales son

$$\frac{\partial g}{\partial x_1} = -2x_1$$

$$\frac{\partial g}{\partial x_2} = -2x_2$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} = -2$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2} = -2$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_1 x_2} = \frac{\partial^2 g}{\partial x_2 x_1} = 0$$

$$D^2 g(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Los menores principales son

$$|-2| < 0$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 > 0$$

Así, $D^2 g(x_1, x_2)$ es definida negativa y g es una función cuasicóncava estricta (Cóncava).

Conclusión de la segunda parte

La concavidad y convexidad de la función de restricción modifica la solución del problema de optimización. Al tratar con un problema de maximización, cuando el conjunto de restricciones es cóncavo, los resultados no tienen sentido en el modelo económico en cuestión, como es el caso no convexo de la situación 3. Las restricciones convexas con la función objetivo cóncava son para los problemas de maximización y las restricciones cóncavas con una función objetivo convexa son para los problemas de minimización. Por otro lado, cambiar la constante k en el lado derecho de la restricción de desigualdad en la situación 2 provoca un cambio en los valores de x_1 y x_2 y λ cuando la restricción es activa, es decir, cuando el multiplicador es λ distinto de cero. Sin embargo, si la restricción modificada es no activa, el multiplicador λ igual a cero, la constante k no tiene importancia en la solución y en los beneficios, volviendo a la situación 1.

Robledo, Yonathan Ariel.
Licenciatura en Economía, EEyN UNSAM.

Conclusión general

La programación cóncava y la programación no lineal tienen como finalidad la búsqueda de los valores extremos de una función f de una o varias variables. Los valores extremos pueden ser valores máximos o valores minimos de una funcion. En esta búsqueda del valor extremo se debe contemplar si f esta o no sujeta a una restricción. El conjunto de restricciones puede ser de igualdad o de desigualdad. En caso de ser de igualdad, los valores extremos se encuentran mediante la técnica de los multiplicadores de Lagrange. Si, en cambio, el conjunto de restricciones es de desigualdad, la técnica empleada son las condiciones necesarias de Kuhn-Tucker, que toma como base los multiplicadores de Lagrange. Por otro lado, tanto la función f como el conjunto de restricciones pueden ser o no funciones lineales. Si f y/o el conjunto de restricciones son no lineales, habrá que emplear el uso de la programación no lineal, considerando si se trata de restricciones de igualdad o de desigualdad. Sin embargo, si la función f y el conjunto de restricciones tienen la forma lineal, se aplicara la programación lineal.

La programación cóncava utiliza el cálculo diferencial y matricial, mediante la matriz de segundas derivadas y la matriz del Hessiano Orlado para decidir si los puntos críticos hallado mediante el uso de la programación no lineal son máximos o mínimos de la función en estudio.

Robledo, Yonathan Ariel.
Licenciatura en Economía, EEyN UNSAM.

Bibliografía

Arrow, K., & Debreu, G. (1954). *Existence of equilibrium for a competitive economy.* Econometrica 22: 265-90.

Chiang, A. C., & Wainwright, K. (2006). *Métodos fundamentales de economía matemática.* México: McGraw Hills.

Kuhn, H. W., & Tucker, A. W. (1951). Nonlinear Programming.

Mas-Colell, A., Whinston, M., & Green, J.,. (1995). *Microeconomic Theory.* Oxford University Press.

Simon, C. P., & Lawrence, B. (1994). *Mathematics for Economists.* W.W. Norton & Company.

Varian, H. (1997). *Análisis Microeconómico* (Tercera ed.). Barcelona: Antoni Bosch.

Varian, H. (1999). *Microeconomia Intermedia. Un enfoque actual* (Quinta ed.). Barcelona: Antoni Bosch.

Referencias

[i] Chiang, A. C., & Wainwright, K. (2006). *Métodos fundamentales de economía matemática*.
[ii] Simon, C. P., & Lawrence, B. (1994). *Mathematics for Economists*.
[iii] Es una definición central para el trabajo en cuestión, junto con las condiciones de Kuhn-Tucker
[iv] Arrow, K., & Debreu, G. (1954). Existence of equilibrium for a competitive economy.
[v] Este teorema complementa las definiciones de la Programación Cóncava y la Programación no Lineal, utilizando conjuntos.