



**UNSAM**

UNIVERSIDAD  
NACIONAL DE  
**SAN MARTÍN**

UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN MARTÍN

## Implementación y análisis de la Retroproyección filtrada en Matlab utilizando un fantomas matemático

Materia: Proyecto final integrador

Alumno: Benitez Enrique

Número de documento: 35.335.865

Tutor: Lic. Roberto Galli

**Índice:**

1	Resumen	3	
2	Agradecimientos	3	
3	Objetivo	4	
4	Introducción	6	
5	Marco Teórico	7	
	5.1	Base matemática del método de retroproyección filtrada	8
	5.2	Retroproyección simple	13
	5.3	Reconstrucción por transformada directa de Fourier	15
	5.4	Retroproyección filtrada	18
	5.5	Calidad de imagen y ruido en medicina nuclear	20
6	Materiales y métodos	23	
	6.1	Diseño de un Fantoma Matemático	23
	6.2	Obtención del Sinograma	24
	6.3	Aplicación del método de retroproyección filtrada en Matlab	27
	6.4	Simulación del ruido en el sinograma	30
7	Resultados Obtenidos	32	
8	Conclusión	37	
9	Bibliografía	38	

**Resumen**

Para los estudios de tomografía por emisión de fotón simple se utilizan dos tipos de algoritmos de procesamiento, de tipo analítico y de tipo estadístico. Se propuso aplicar el algoritmo de tipo analítico de retroproyección filtrada a un fantoma matemático. Para tal tarea se utilizó el programa Matlab y, manipulando las variables del algoritmo, se pudo observar su comportamiento.

Palabras clave: SPECT; Retroproyección filtrada; Matlab; Fantomas.

**Agradecimientos**

A mi familia que me apoyó todo a lo largo de mis años de carrera, a mis amigos que estuvieron conmigo y no se fueron a la hora de hablar de retroproyección filtrada y a mis profesores, que tuvieron mucha paciencia conmigo e hicieron que me interese un 100% en esta carrera.

## **1.Objetivo**

El objetivo de este trabajo es realizar y analizar la reconstrucción tomográfica por el método de retroproyección filtrada de una imagen de un fantoma matemático a través de la utilización del programa Matlab.

## 2. Introducción

Cherry (2012) señala que un problema básico en la obtención de imágenes en medicina nuclear es que las imágenes obtenidas son proyecciones bidimensionales de una fuente de distribución tridimensional. Estas son imágenes con estructuras superpuestas y subyacentes a la estructura de interés.

Una solución frente a este problema es la obtención de la imagen tomográfica. Las mismas son representaciones bidimensionales de estructuras que se encuentran dentro de un plano seleccionado en un objeto tridimensional. Las técnicas modernas de tomografía computada (TC) usan sistemas de detectores que rotan alrededor del objeto de interés adquiriendo numerosas vistas angulares, también conocidas como proyecciones.

La reconstrucción de imágenes desde múltiples proyecciones de emisiones detectadas de un radionucleído dentro del cuerpo se conoce como tomografía computada por emisión (ECT por sus siglas en inglés de Emission Computed Tomography).

Algoritmos matemáticos son usados para reconstruir las imágenes de los planos seleccionados que se encuentran dentro del objeto a partir de los datos de las proyecciones. El algoritmo de reconstrucción es la operación matemática que permite la obtención de los cortes transversales a partir de las proyecciones.

En la actualidad los algoritmos más utilizados en tomografía computada son: el algoritmo de retroproyección filtrada (RPF), como ejemplo de un algoritmo de tipo analítico y el algoritmo Ordered Subsets Expectation Maximization (OSEM) como algoritmo de tipo estadístico.

La RPF se basa en dos conceptos: Transformada de Radon, que como señala Pérez (2005), transforma una función  $f(x,y)$  en un sinograma, y el Teorema de corte de Fourier.

En este trabajo se mostrará el funcionamiento del algoritmo de RPF aplicado a un fantoma matemático. La aplicación del algoritmo OSEM no se tendrá en cuenta en el desarrollo de este proyecto.

### 3. Marco Teórico

#### 3.1 Base matemática de los métodos de retroproyección

Inicialmente se asume que los datos son recolectados con una cámara gamma tomográfica o SPECT (por sus siglas en inglés de Single Photon Emission Computed Tomography) que cuenta con un colimador de agujeros paralelos. También se asume que el detector solo acepta la radiación perpendicular (desde un corte delgado) hacia el frente del detector, como se muestra en la figura 3-1.

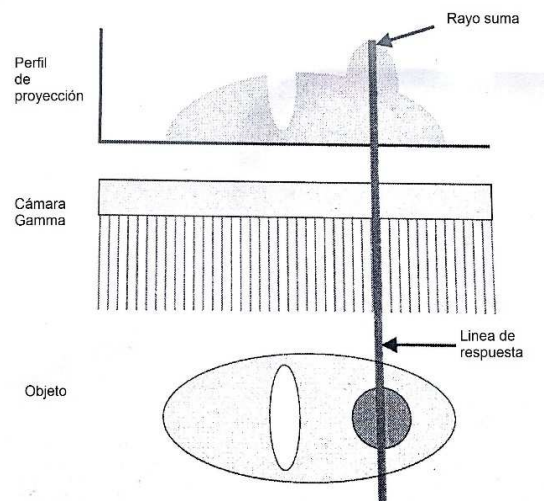


Figura 5-1 Corte transversal de la respuesta característica de una cámara gamma ideal. Cada agujero del colimador forma una línea de respuesta para que la cámara gamma solo registre la actividad proveniente de esa dirección. La actividad registrada de cada agujero forma un rayo suma y el conjunto de éstos un perfil de proyección.  
Fuente: Adaptado de Cherry, Sorenson y Phelps (2012). Physics in nuclear medicine. Philadelphia, PA: Saunders Elsevier.

Cada agujero del colimador solo acepta radiación de un cono estrecho definido por su extensión geométrica. Este cono denominado también ángulo sólido define la línea de respuesta para el agujero del colimador. Para simplificar el problema de la detección se considerará la línea de respuesta como un cilindro de diámetro igual al de los agujeros del colimador y se ignorarán los

efectos de atenuación y dispersión. Se asume, además, que las cuentas registradas para cada agujero del colimador son proporcionales a la radioactividad contenida dentro de su línea de respuesta.

Como la cámara SPECT está montada en un gantry, el detector puede registrar proyecciones desde numerosos ángulos alrededor del cuerpo.

Para poder realizar la reconstrucción tomográfica se utilizan algoritmos matemáticos para relacionar los datos de las proyecciones de la distribución bidimensional de la actividad dentro del corte proyectado. Un esquema es presentado en la figura 5-2.

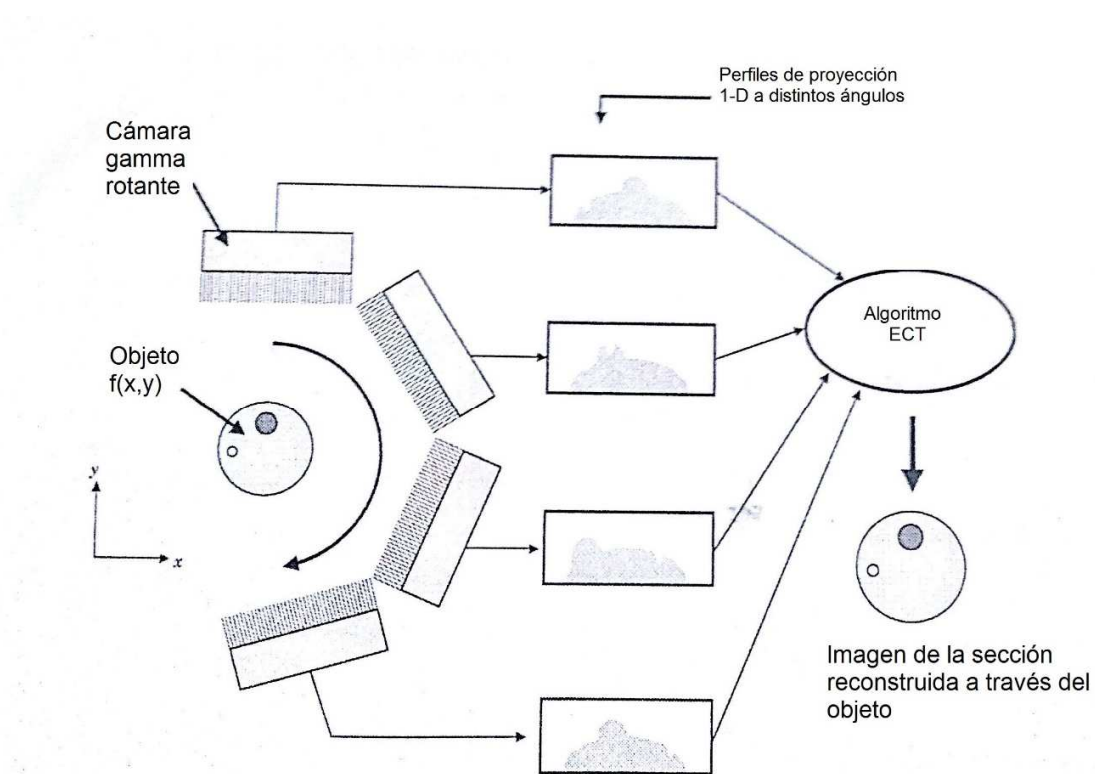


Figura 5-2 La cámara gamma rota alrededor del objeto proporciona un juego de perfiles de proyección unidimensionales para un objeto bidimensional, los cuales se utilizan para calcular la distribución de la radioactividad en el objeto.

Fuente: Adaptado de Cherry, Sorenson, Phelps. (2012). Physics in nuclear medicine. Philadelphia, PA: Saunders Elsevier.



Cherry (2012) afirma:

Se asume que  $N$  proyecciones son registradas con igual espaciad angular entre 0 y 180 grados. Bajo estas condiciones ideales, el perfil de proyección registrado con un ángulo de rotación de  $(180 + \Phi)$  grados debería ser el mismo (además de la inversión derecha-izquierda) que el perfil registrado a  $\Phi$  grados.

Para propósitos de análisis, es conveniente introducir un nuevo sistema de coordenadas que sea estacionario con respecto del detector del sistema SPECT. Esto se denota como el sistema de coordenadas  $(r,s)$  y se ilustra en la figura 5-3.

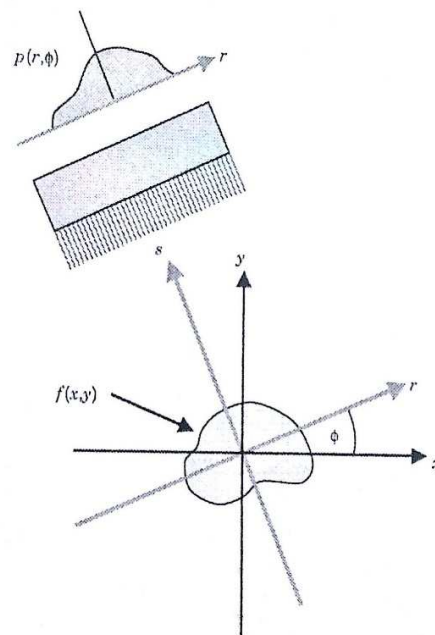


Figura 5-3 El sistema de coordenadas  $(r,s)$  rota con un ángulo de proyección  $\Phi$  respecto al sistema de coordenadas  $(x,y)$  del objeto y se ajusta respecto de la cámara gamma.

Fuente: Adaptado de Cherry, Sorenson, Phelps. (2012). Physics in nuclear medicine. Philadelphia, PA: Saunders Elsevier.

Si la cámara es rotada en un ángulo  $\Phi$  con respecto a la coordenada  $(x,y)$  del objeto escaneado, las ecuaciones para la transformación desde las coordenadas  $(x,y)$  hasta las coordenadas  $(r,s)$  puede ser derivada desde el principio de triángulos similares y está dado por :

$r = x\cos\phi + y\sin\phi$	(5-1)
$s = y\cos\phi + x\sin\phi$	

Estas ecuaciones pueden ser usadas para determinar como la radiación en una ubicación  $(x,y)$  dentro del objeto contribuye a la señal registrada en la ubicación  $r$  con la rotación angular  $\Phi$ . (P.254).

Una forma usada para mostrar un juego completo de datos de proyecciones es en forma de una matriz bidimensional  $p(r,\Phi)$ . A esta matriz se la conoce como sinograma y muestra las proyecciones tomadas a una fuente puntual simple en la figura 5-4.

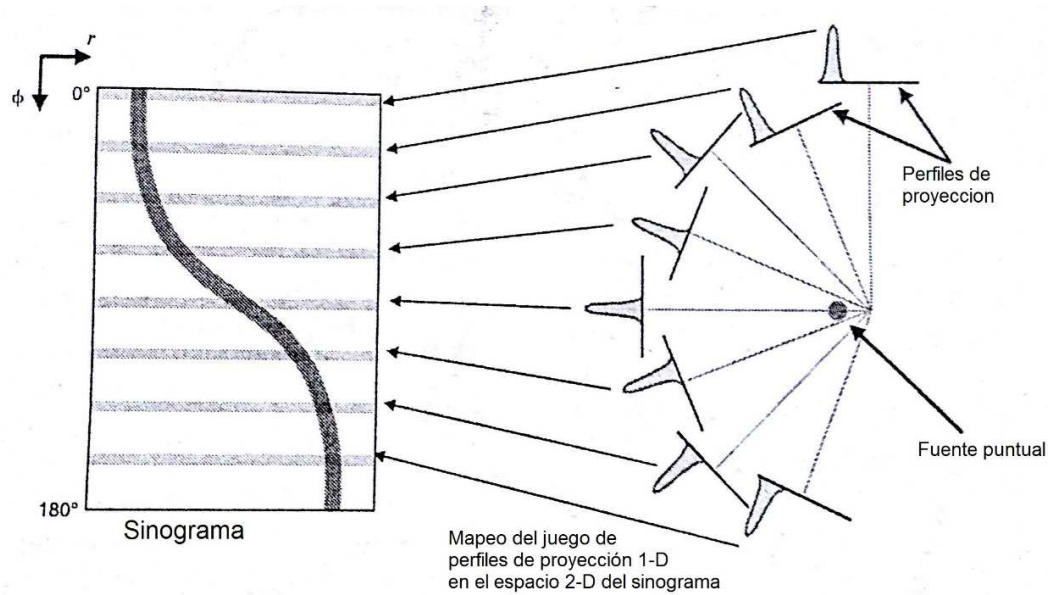


Figura 5-4 Muestra bidimensional para un juego de perfiles de proyección, conocido como sinograma. Cada fila corresponde a un perfil individual. Una fuente puntual marca un camino sinusoidal en el sinograma.  
Fuente: Adaptado de Cherry, Sorenson, Phelps. (2012). Physics in nuclear medicine. Philadelphia, PA: Saunders Elsevier.

El paso desde una función  $f(x,y)$  al sinograma es posible debido a la aplicación de la transformada de Radon, que como afirma Pérez (2005) puede expresarse como:

$$TR[f(x,y)] = P_{\phi}(t) = \int_{(\phi,t) \text{ línea}} f(x,y) ds \quad (5-2)$$

Donde  $\phi$  y  $t$  son las coordenadas del espacio de la transformación y  $ds$  es un incremento diferencial a lo largo de la línea de integración ( $L$ ) en el dominio real de la función  $f(x,y)$  (figura 5-5)

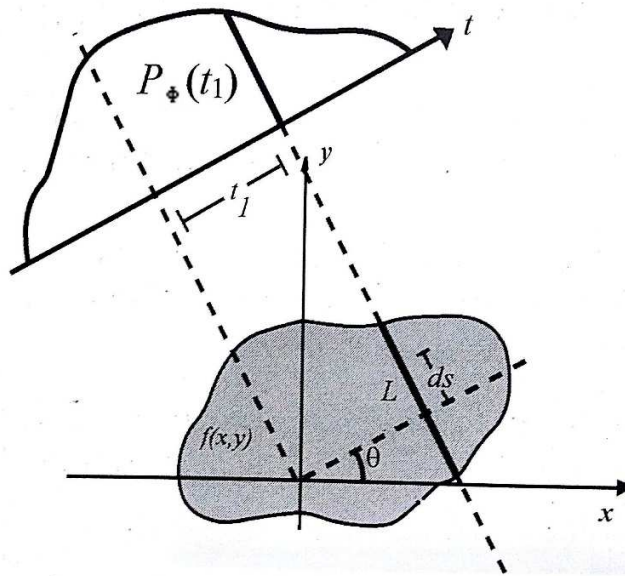


Figura 5-5 Transformada de Radon. El valor de  $P_{\phi}(t)$  contiene el valor de la función a lo largo de la línea  $L$ .  
Fuente: Adaptado de Pérez, Peña, Lopez y Galli (2005). Cardiología nuclear, fundamentos y aplicaciones. Buenos Aires: Jorge Baudino ediciones.

Como resultado de la transformación, el valor de la función en el campo real, integrado a lo largo de una línea, se comprime en un único valor en el espacio de Radon. Dicho valor es la suma de los valores de  $f(x,y)$  a lo largo de  $L$ , representada por la integración a lo largo de dicha línea.

El valor de la transformada de Radon (TR) en un punto  $t_1$  para un determinado  $\phi$ , se denomina rayo suma o integral de línea. El conjunto de todos los rayos suma para una misma dirección  $\Phi$  se denomina perfil ( $p\Phi(t)$ ), el conjunto de todos los perfiles ordenados es un sinograma. (P. 158)

### 3.2 Retroproyección simple

La aproximación más básica para reconstruir una imagen a partir de perfiles es por retroproyección simple. La figura 5-6 muestra perfiles de proyección adquiridos desde distintos ángulos alrededor de la fuente. Las cuentas registradas en un elemento de un perfil de proyección

son divididas uniformemente entre los píxeles que se encuentran dentro de su trayecto al realizar una proyección.

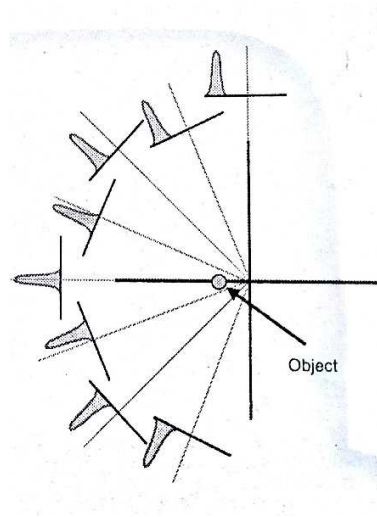


Figura 5-6 Perfiles de proyección para una fuente puntual desde distintos ángulos de proyección.

Fuente: Adaptado de Cherry, Sorenson, Phelps. (2012). Physics in nuclear medicine. Philadelphia, PA: Saunders Elsevier.

Esta operación es llamada retroproyección. Cuando las retroproyecciones para todos los perfiles son obtenidas, se puede lograr una aproximación de la distribución de la actividad dentro del corte escaneado.

La retroproyección para N perfiles esta descrita por:

$$f(x, y) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N p(x \cos \phi_i + y \sin \phi_i, \phi_i) \quad (5-3)$$

Donde  $\Phi_i$  denota el i-ésimo ángulo de proyección, y  $f'(x,y)$  denota una aproximación hacia la verdadera distribución de la radioactividad  $f(x,y)$ .

La imagen construida a través de este método presenta un artefacto que se proyecta hacia afuera de la verdadera localización del objeto, resultando en una borrosidad de su imagen.

La calidad de la imagen puede ser mejorada al elevar el número de proyecciones y el número de muestras a lo largo del perfil. De todas formas, utilizando un número infinito de proyecciones, la imagen borrosa persiste.

Matemáticamente la relación entre la imagen verdadera y la reconstruida por retroproyección simple está dada por:

$f(x, y) = f(x, y) * \left(\frac{1}{r}\right)$	(5-4)
--	-------

Donde \* representa el proceso de convolución. (P. 257)

Un perfil tomado a través de la imagen reconstruida para una fuente puntual que es reconstruida con un buen muestreo angular decrece en proporción  $(1/r)$ , donde  $r$  es la distancia desde el centro de la ubicación de la fuente puntual. Por su comportamiento, el efecto es conocido como borrosidad  $1/r$ .

El resultado de llevar a cabo el proceso de retroproyección simple se puede ver en la figura 5-7.

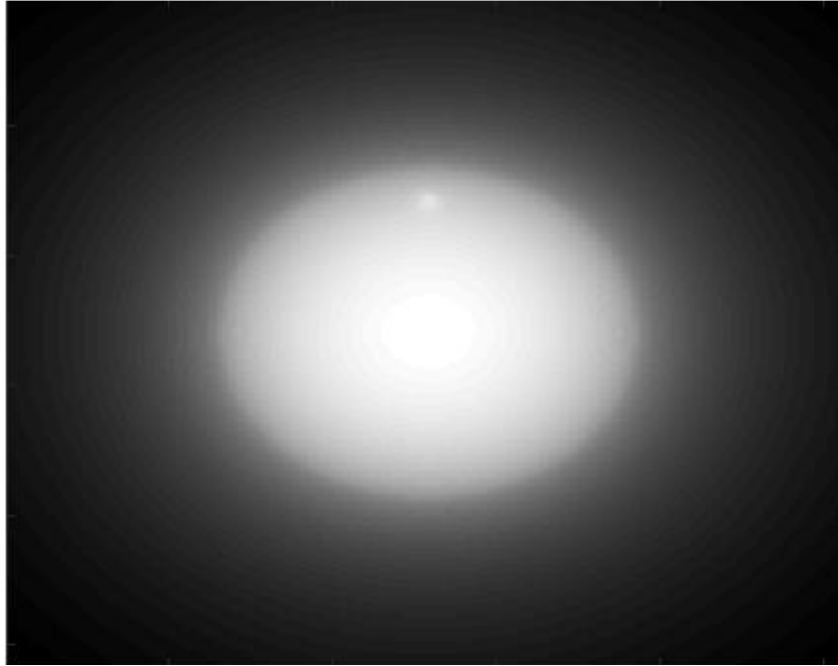


Figura 5-7 Imagen obtenida al aplicar el algoritmo de retroproyección simple. Se puede observar claramente la borrosidad  $1/r$ .

### 5.3 Reconstrucción por transformada directa de Fourier

Una aproximación que evita la borrosidad  $1/r$  es la reconstrucción por transformada de Fourier (FT).

La FT es un método alternativo para representar espacialmente datos variables. Por ejemplo, en vez de presentar un perfil de imagen unidimensional como una función variable espacialmente,  $f(x)$ , el perfil es representado como una sumatoria de funciones seno y coseno de diferentes frecuencias espaciales,  $k$ . Las amplitudes para las distintas frecuencias espaciales son representadas en la FT de  $f(x)$ , la cual se denota como  $F(k)$ . La operación para producir la FT se simboliza como:

$F(k) = \mathcal{F} [f(x)]$	(5-5)
-----------------------------	-------

Como afirma Cherry (2012):

La función  $f(x)$  es una representación del perfil de la imagen en el espacio del objeto, mientras  $F(k)$  representa el perfil en el espacio de frecuencia espacial, también llamado espacio  $k$ . Las FT pueden ser extendidas a funciones bidimensionales,  $f(x,y)$ , como una imagen 2-D. En este caso, la FT también es 2-D y representa frecuencias espaciales a lo largo de los ejes  $x$  e  $y$ ,  $f(k_x, k_y)$ , en donde  $k_x$  y  $k_y$  representan ejes ortogonales en el espacio bidimensional  $k$ . Simbólicamente la FT 2-D es representada como:

Matemáticamente una función y su FT son equivalentes en el sentido que cualquiera puede ser derivada desde la otra. La operación de conversión de la FT de una función a su original es llamada FT inversa y se denota como

$\mathcal{F}^{-1}[F(k_x, k_y)] = f(x, y)$	(5-7)
---	-------

(P. 258)

Para poder reconstruir una imagen desde su FT 2-D, el juego completo de datos del espacio  $k$  2-D debe estar disponible (ecuación 2-7). No hay forma directa para adquirir los datos del espacio  $k$  en medicina nuclear. En lugar de eso, los sistemas de SPECT-CT dependen del teorema de corte de Fourier. Este teorema sostiene que la FT de la proyección de un objeto 2-D a lo largo de un ángulo de proyección  $\phi$  [en otras palabras, la FT de un perfil,  $p(r, \phi)$ ], es igual al valor de la FT del objeto medido a través del origen y a lo largo del mismo ángulo,  $\phi$ , en el espacio  $k$ . Matemáticamente, la expresión general para el teorema del corte de Fourier es



$\mathcal{F} [p(r, \phi)] = F(k_r, \phi)$	(5-8)
---	-------

Donde  $F(k_r, \Phi)$  denota el valor de la FT medida a una distancia radial  $k_r$  a lo largo de una línea con un ángulo  $\Phi$  en el espacio  $k$ .

El teorema de corte de Fourier proporciona un medio para obtener datos 2-D en el espacio  $k$  para un objeto a partir de series de mediciones 1-D en el espacio del objeto. La figura 5-8 y la ecuación 3-8 proporcionan las bases para la reconstrucción de un objeto a partir de sus perfiles de proyección.

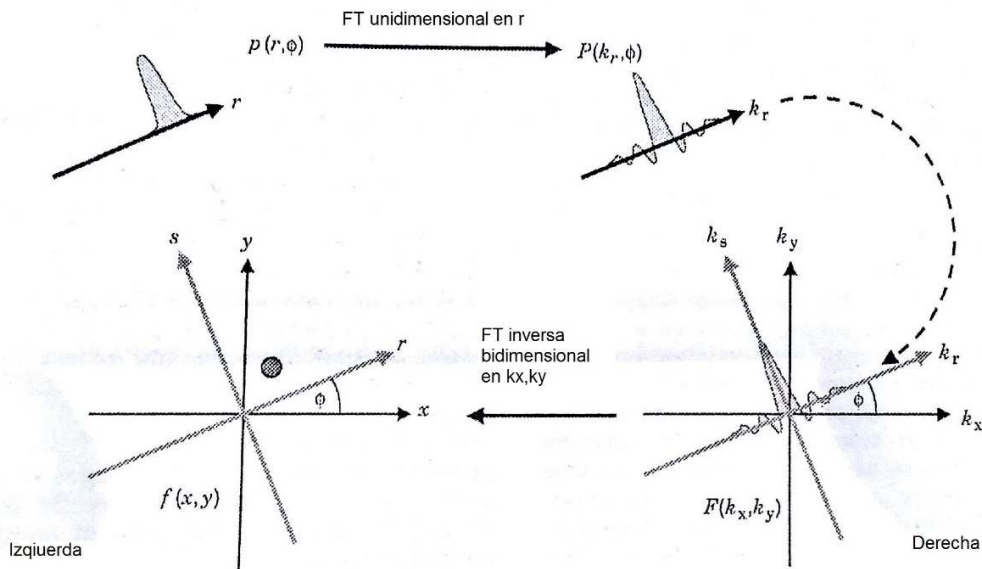


Figura 5-8 Conceptos del teorema de corte de Fourier. (Izquierda)  $p(r, \Phi)$  es un perfil unidimensional del objeto bidimensional  $f(x, y)$  en el ángulo de proyección  $\phi$ . El teorema establece que la FT de este perfil de proyección (derecha) es igual al valor de la FT bidimensional del objeto,  $F(k_x, k_y)$  a lo largo de una línea a través del origen del espacio  $k$  para ese mismo ángulo  $\phi$ .

Fuente: Adaptado de Cherry, Sorenson, Phelps. (2012). Physics in nuclear medicine. Philadelphia, PA: Saunders Elsevier.

### 3.4 Retroproyección filtrada

Cherry (2012) afirma que:

Como sucede con el algoritmo de la FT directa, la retroproyección filtrada (FBP) emplea el teorema del corte de Fourier, pero lo usa en combinación con la retroproyección como una forma para eliminar la borrosidad  $1/r$ . Los pasos son los siguientes:

- 1- Se adquieren los perfiles de proyección con  $N$  ángulos de proyección.
- 2- Se computa la FT 1-D de cada perfil. De acuerdo con el teorema de corte de Fourier, esto proporciona los valores de la FT para una línea a través del espacio  $k$ .
- 3- Se aplica un “filtro rampa” a cada perfil en el espacio  $k$ . Matemáticamente, esto involucra multiplicar la FT de cada proyección por  $|k_r|$ , el valor absoluto de la coordenada radial en el espacio  $k$  para cada punto en la FT. Así el valor de la FT es amplificado linealmente en proporción a su distancia desde el origen del espacio  $k$ . La Figura 4-8 ilustra el perfil de un filtro rampa, con amplitud definida por  $H(k_r)$ . Aplicando el filtro rampa se produce una FT modificada para cada proyección, dada por

$P'(k_r, \Phi) =  k_r  P(k_r, \Phi)$	(5-9)
--------------------------------------	-------

Donde  $P(k_r, \Phi)$  es la FT sin filtrar.

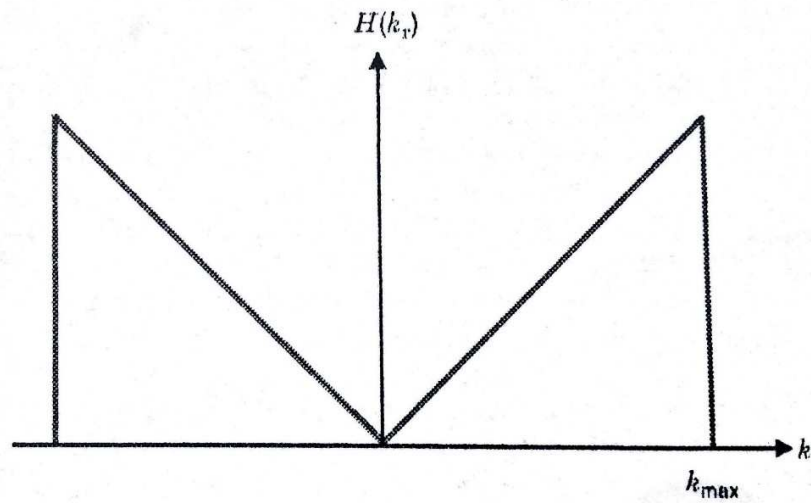


Figura 5-9 Filtro rampa en el dominio del espacio de las frecuencias (espacio  $k$ ). El filtro selectivamente amplifica los componentes de alta frecuencia en relación a los de baja frecuencia. El filtro elimina la borrosidad  $1/r$  presente en la retroproyección simple y agudiza los detalles de la imagen, pero también amplifica los componentes de ruido de alta frecuencia en la imagen.

Fuente: Adaptado de Cherry, Sorenson, Phelps. (2012). Physics in nuclear medicine. Philadelphia, PA: Saunders Elsevier.

Luego se computa la FT inversa para cada FT filtrada para obtener un perfil de proyección filtrado. Esto está dado por

$p'(r, \Phi) = F^{-1} [P'(k_r, \Phi)]$ $= F^{-1} [ k_r  P(k_r, \Phi)]$	(5-10)
--	--------

- 4- Se realiza una retroproyección convencional usando los perfiles filtrados. Matemáticamente el resultado es

$f(x, y) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N p'(x \cos \phi_i + y \sin \phi_i; \phi_i)$	(5-11)
--	--------

La única diferencia entre la retroproyección simple y la retroproyección filtrada es que en la última los perfiles son modificados por un filtro de reconstrucción aplicado en el espacio  $k$  antes de ser retroproyectados hacia la imagen. La función del filtro rampa es mejorar las altas frecuencias espaciales (gran  $k_r$ ) y suprimir las bajas frecuencias espaciales (bajo  $k_r$ ). El resultado del filtrado es la eliminación de la borrosidad  $1/r$ .

La amplificación de las altas frecuencias en la FBP también lleva a la amplificación del ruido de alta frecuencia. Para minimizar este efecto el filtro rampa suele modificarse. (P. 259)

### 5.5 Calidad de imagen y ruido en medicina nuclear

La calidad de la imagen en medicina nuclear está dada por la capacidad del sistema de imagen de poder detectar las diferencias en la captación de un RF entre una zona de lesión y las zonas que la rodean. Por lo tanto, una imagen de alta calidad es aquella en la que se hace visible este contraste.

Existen varios factores que degradan la calidad de la imagen, algunos propios del sistema de adquisición como la resolución espacial, de energía, o la falta de uniformidad. Otros factores dependen del paciente y la ubicación de la zona a examinar, como el aumento de la dispersión en el caso de los pacientes de gran tamaño o la profundidad a la que se encuentra el tejido a estudiar.

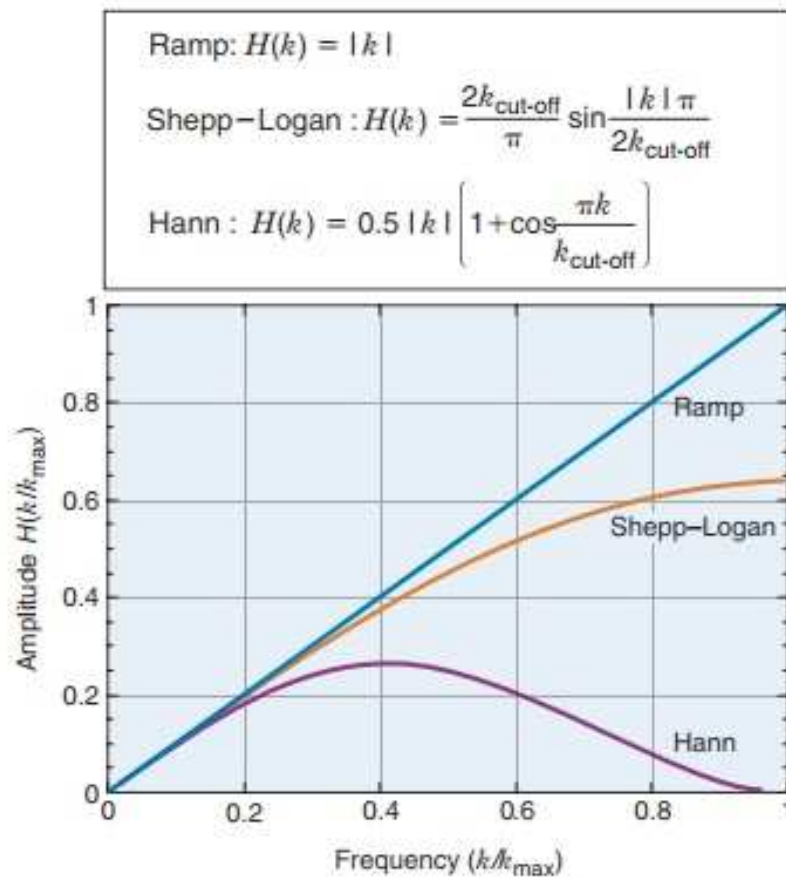
Por último, algunos factores dependen de manejo del equipo y pueden ser controlados por el operador. Los factores son, la resolución espacial y el ruido, que se reduce mediante la selección del tiempo de adquisición y el tamaño de la matriz más adecuados.

La principal fuente de ruido es la distribución aleatoria de fotones por cada elemento de imagen detectados. Un alto nivel de ruido hace que baje la visibilidad del contraste, lo que reduce la calidad de la imagen. Para reducir el nivel de ruido se puede aumentar el tiempo de exploración o la actividad administrada, pero ello trae problemas como el aumento de la exposición de los pacientes o la posibilidad de que los pacientes se muevan.

Otra forma de reducir el nivel de ruido es aumentar el tamaño del píxel, disminuyendo el tamaño de la matriz, por ejemplo, pasando de una matriz de 256x256 a otra de 128x128 se reduce el nivel de ruido en las proyecciones a la mitad. Sin embargo, disminuir demasiado el tamaño de la matriz puede influir negativamente en la resolución espacial de la imagen.

Por último, se puede reducir el nivel de ruido y aumentar el contraste, realizando un procesamiento de imagen, como la sustracción de fondo y el filtrado digital.

El filtrado digital suele hacerse aplicando un filtro externo junto con el filtro rampa (inherente al método de retroproyección filtrada), dando como resultado un filtro rampa modificado. La característica de los filtros externos reside en que son generalmente pasa bajos, ya que tienen como finalidad reducir el ruido, el cual se encuentra en frecuencias altas. Ejemplos de filtros éstos son presentados en la figura 5-10.



**Figura 5-10.** Filtro rampa junto con otros filtros de reconstrucción que son diseñados para prevenir artefactos y amplificación del ruido, causado por el corte agudo del filtro rampa en la frecuencia máxima. Nótese que todos los filtros tienen la misma respuesta a frecuencias bajas y que sus frecuencias de corte se corresponden con la frecuencia máxima. Sin embargo, los filtros Hann y Shepp-Logan decrecen a frecuencias altas, de este modo minimizan los artefactos y la amplificación del ruido.

Fuente: Adaptado de Cherry, Sorenson, Phelps. (2012). Physics in nuclear medicine. Philadelphia, PA: Saunders Elsevier.

## 6. Materiales y métodos

Para el desarrollo del fantomas y la aplicación del método de retroproyección filtrada se utilizó el programa MATLAB © versión 2016.

### 6.1 Diseño de un fantomas matemático:

Se aplicará la reconstrucción a dos sinogramas generados a través de dos métodos distintos, el método por transformada de Radon y otro por método suma, para poder hacer esto inicialmente se diseña un fantoma de la forma:

```
[P,E]= phantom(V,256);
```

Donde V se define previamente como un vector de la forma:

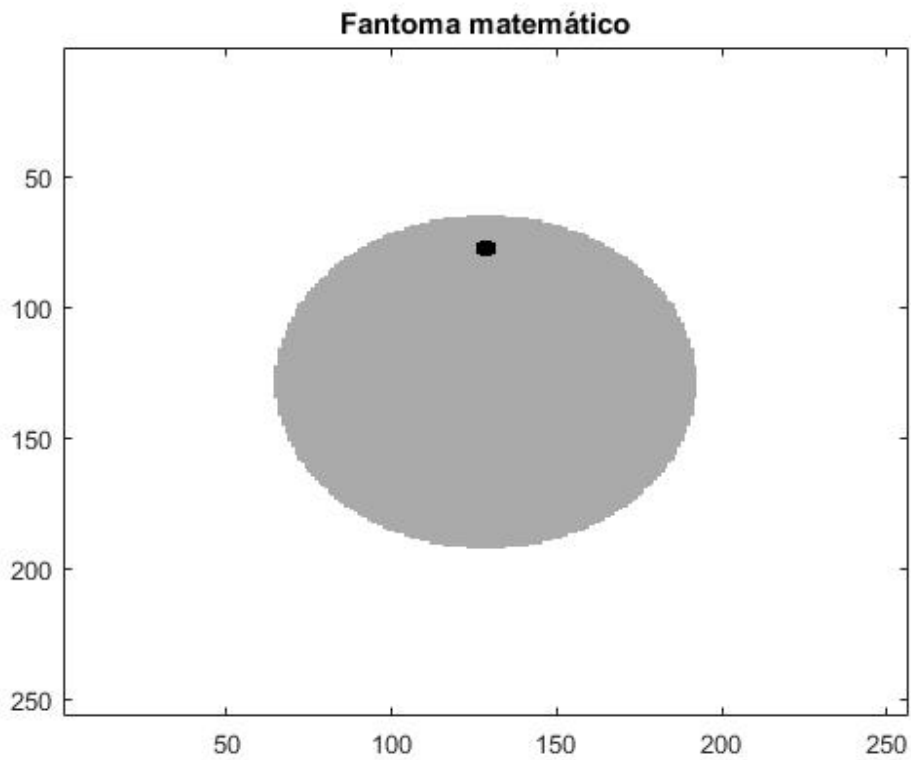
```
V = [A a b x0 y0 phi;  
     A' a' b' x0' y0' phi'];
```

En la cual A define la intensidad de la circunferencia, a y b definen la longitud de los semiejes horizontal y vertical (al ser circunferencias a y b deben ser iguales), x0 e y0 definen las coordenadas espaciales del centro y phi define el ángulo de rotación entre el semieje horizontal y el eje x de la imagen.

El vector V se definió de la siguiente manera:

```
V = [10 0.5 0.5 0 0 0;  
     20 0.025 0.025 0 0.4 0];
```

Habiendo hecho esto, se generan dos círculos, estableciendo así una fuente puntual contenida en el fantoma de forma circular, como se muestra en la figura 6-1.



**Figura 6-1.** Fantoma matemático, se puede observar dos circunferencias, la interior se considerará una fuente puntual para el desarrollo del procesamiento.

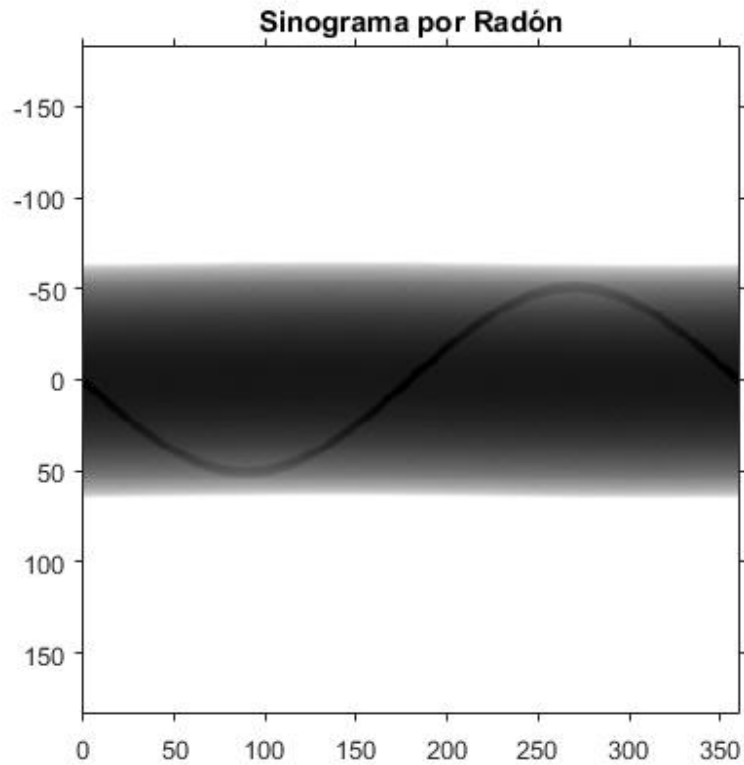
## 6.2 Obtención de los sinogramas

Se estableció el valor del radio de giro,  $\theta$  en 360 grados y se procedió a aplicar la transformada de Radon a través del comando:

```
[R, xp] = radon(P, theta);
```

Donde  $P$  es el fantoma diseñado y  $\theta$  el radio de giro.



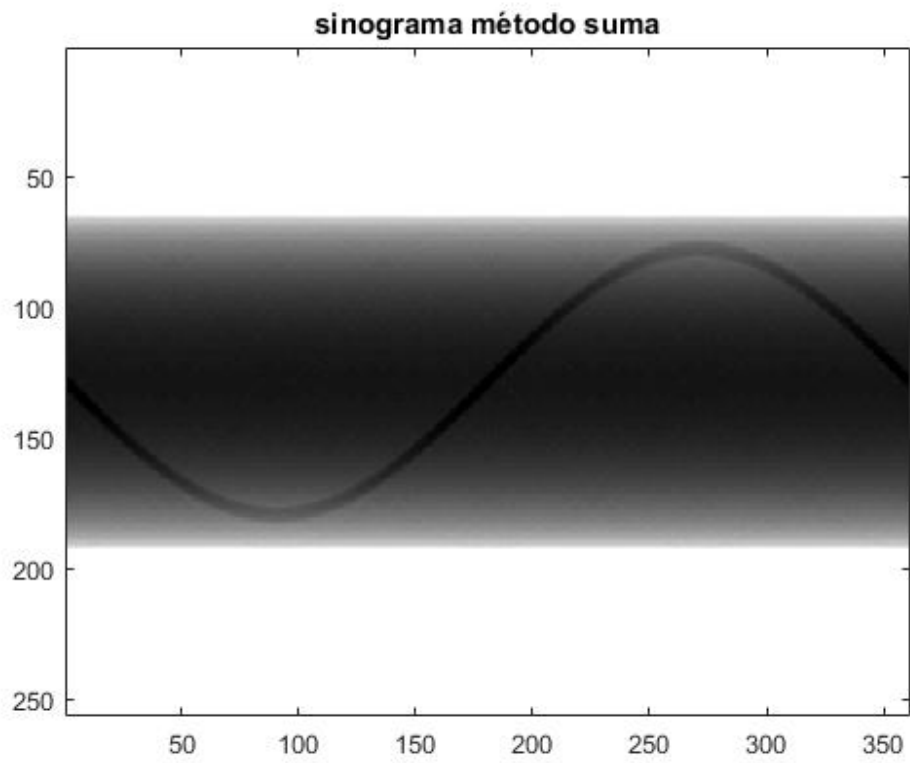


**Figura 6-2.** Sinograma por transformada de Radon

Para el método por suma se generó un ciclo “for” anidado donde se fue sumando cada una de las proyecciones, esto se hizo con el comando:

```
i = 0;
for t = 0:360
    i = i+1;
    pr = imrotate(P,t,'bilinear','crop');
    s(i,:)= sum (pr);
end
```

Donde “imrotate” rota el fantoma a intervalos t, a lo largo de los 360 grados para poder luego sumar las proyecciones.



**Figura 6-3.** Sinograma por método suma

### 6.3 Aplicación del método de retroproyección filtrada en Matlab

Para realizar el proceso de RPF el proceso es igual para ambos sinogramas, puede hacerse a través del comando

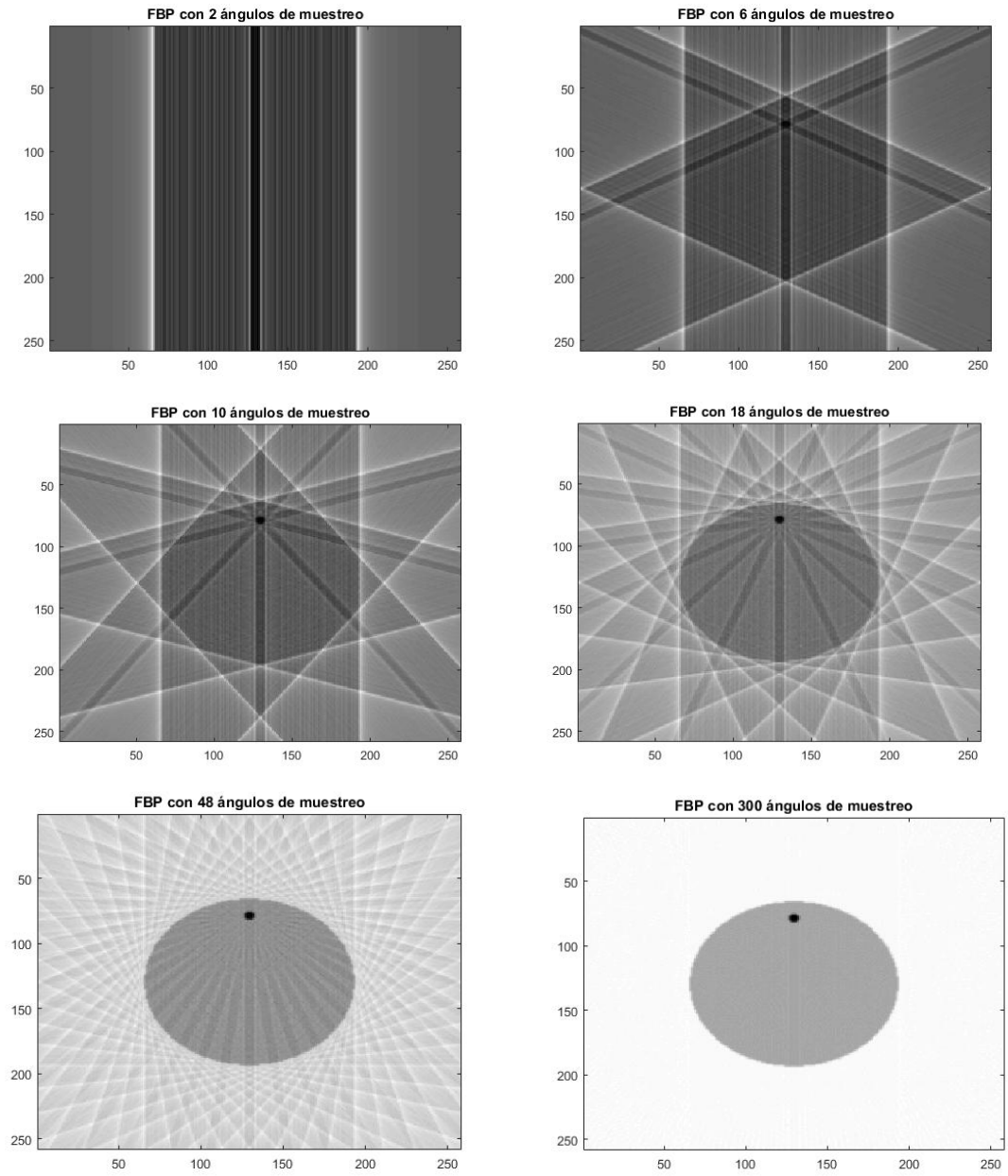
```
I=iradon(R,theta);
```

Donde “iradon” lleva a cabo el proceso de la transformada inversa de Radon para la reconstrucción de la imagen.

En este punto se puede modificar el comando para observar el cambio que se produce al reducir la cantidad de ángulos de muestreo, basta con cambiar el paso en el radio de giro (theta), de forma:

```
theta = 0:30:360;
```

En este caso por ejemplo al realizar la FBP se obtendrá una imagen con un muestreo de 72 pasos, en vez de uno de 360 por ejemplo, el cambio en la imagen final al modificar el comando se puede observar en la figura 6-4.



**Figura 6-4.** Reconstrucción por FBP realizada al variar la cantidad de ángulos muestreados.

Se puede medir el error existente entre las imágenes reconstruidas por los distintos métodos y la original, previamente igualando el tamaño de las matrices e introduciendo el comando:

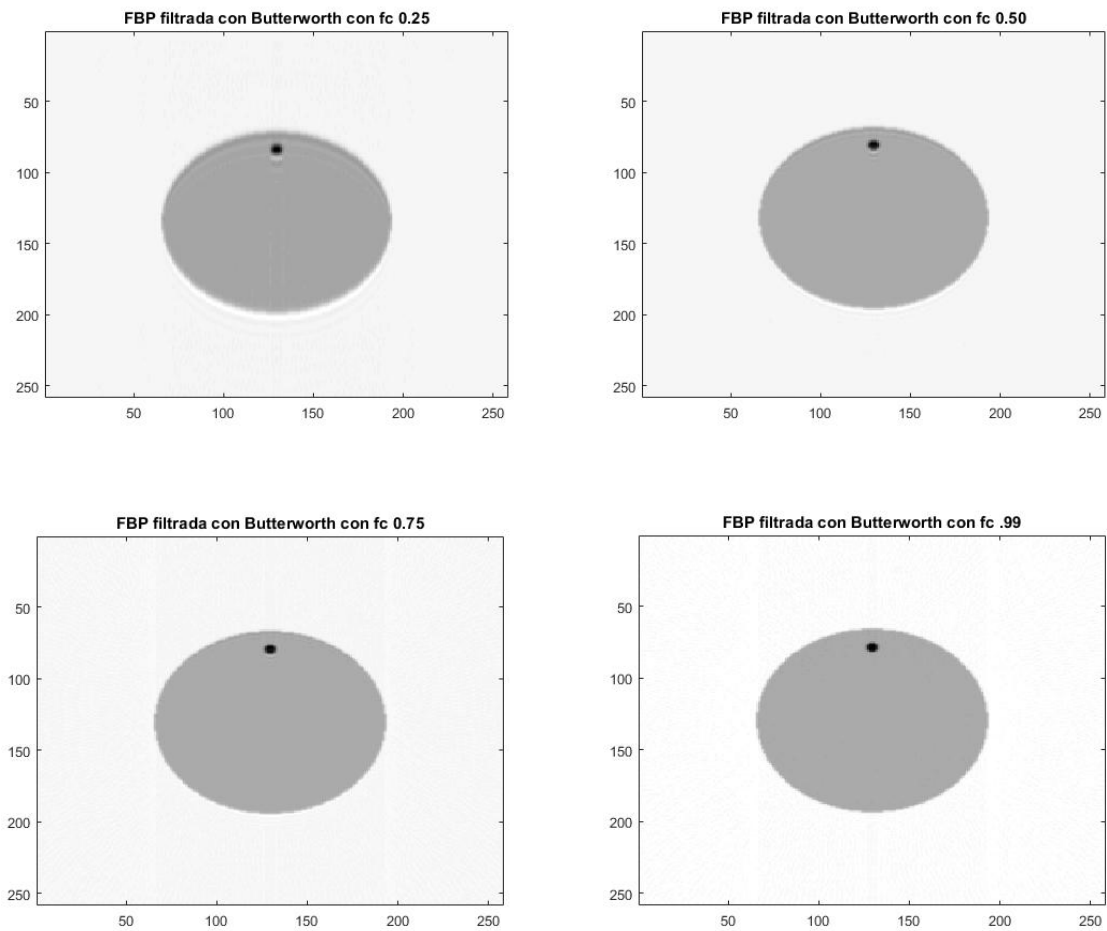
```
error = R - S;  
MSE = sum(sum(error .* error)) / (M * N);
```

Donde “error” es la diferencia entre las imágenes y MSE es mean squared error, es decir el error cuadrático medio.

Para mostrar el funcionamiento de los filtros externos, utilizados habitualmente para tratar el problema del ruido, se diseñó un filtro de tipo Butterworth pasa-bajo aplicado al sinograma, utilizando el comando “Butter” de la siguiente manera:

```
[b,a] = butter(n,Wn);  
freqz(b,a);  
  
dataIn = I;  
dataOut = filter(b,a,dataIn);
```

Donde  $n$  es el orden o potencia del filtro y  $W_n$ , su frecuencia de corte ( $f_c$ ). Solo se modificó la frecuencia de corte, la potencia se fijó en 6. La variación de la  $f_c$  del filtro Butterworth se aprecia en la figura (6-5).



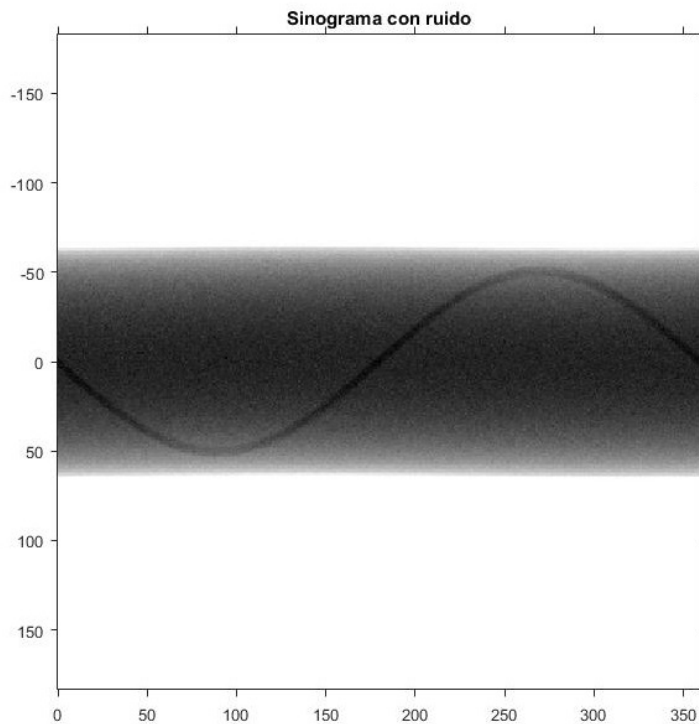
**Figura 6-5.** Variación de la frecuencia de corte en un filtro Butterworth. Se puede ver que al aumentar la frecuencia de corte la imagen obtenida se asemeja mejor al fantoma matemático.

## 6.4 Simulación del ruido en el sinograma

Se puede simular ruido estadístico en Matlab, agregándolo al sinograma para ver su efecto sobre la retroproyección filtrada. Las líneas de código utilizadas fueron:

```
J = imnoise(I, type);
I = iradon(R, theta, interp, filter, frequency_scaling, output_size);
```

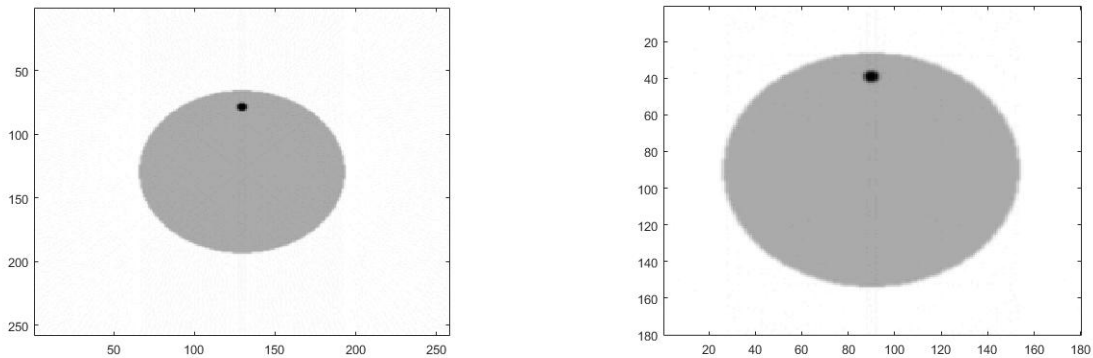
Donde en la primer línea se cambia el formato de imagen al sinograma a uint16 (conversión a una imagen de 16 bit) para poder utilizar el comando “imnoise”, y se le agrega ruido de tipo poisson para simular el ruido estadístico. Luego se realiza la retroproyección filtrada a través de la inversa de Radon aplicando una interpolación de tipo ‘nearest’, realizando una interpolación de los puntos con su vecino más cercano, y con filtro ‘Shepp-Logan’, que multiplica al filtro rampa por una función sinusoidal. Además, se utiliza una frecuencia de corte de 0,4 y con tamaño de imagen de salida de 256 x 256.



**Figura 6-6.** Sinograma con ruido de tipo Poisson simulado

## 7. Resultados obtenidos

Al aplicar los comandos correspondientes se obtuvieron las reconstrucciones de imagen para ambos sinogramas:



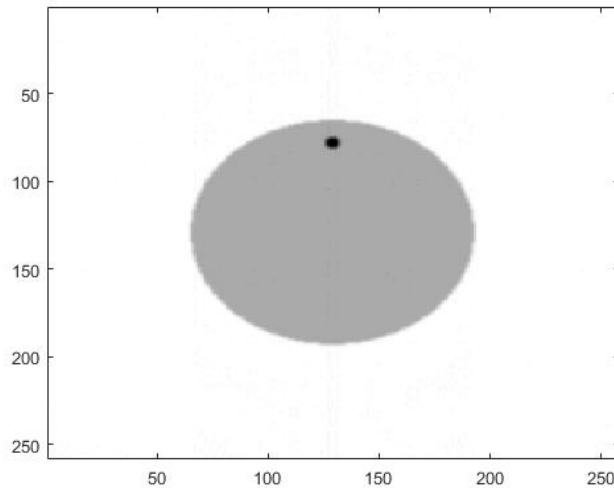
**Figura 7-1.** Reconstrucción con retroproyección simple aplicado a un sinograma generado con el método por transformada de Radon (izquierda) y a un sinograma generado con el método de suma (derecha).

La diferencia entre los tamaños surge por utilizar el método suma, ya que al realizar la línea de código para generar el sinograma, debe incluirse el comando 'crop' que recorta y ajusta el tamaño de la imagen de salida con la imagen de entrada. Este recorte provoca la diferencia de tamaños que puede corregirse rellenando el espacio de matriz faltante con ceros, agregando a la línea de comando de generación del sinograma, luego de cerrar el ciclo 'for', lo siguiente:

```
s = padarray(s,[0 55]);
r=imrotate(s,90);
r2 = zeros(367,361);
r2(2:end,:) = r;
r = r2;
```

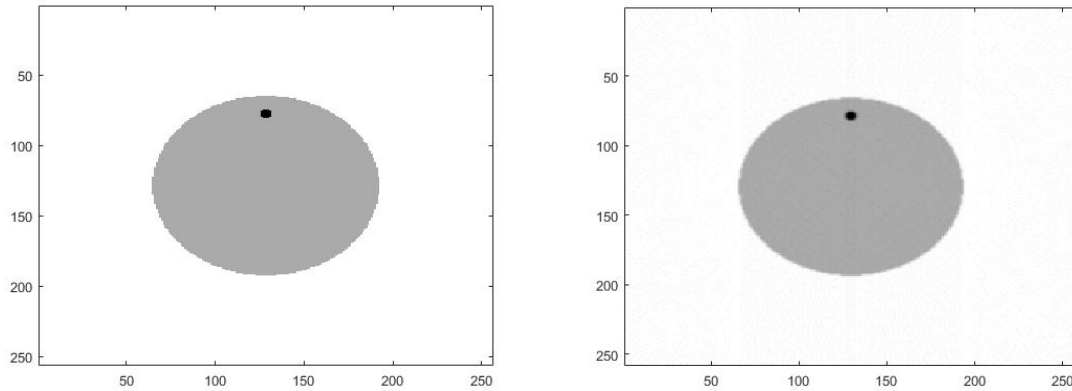


Donde se define  $r_2$  con las medidas de  $R$ , se asigna  $r$  a  $r_2$  con las medidas de  $R$  y por último se redefine  $r$  con las medidas de  $R$ .

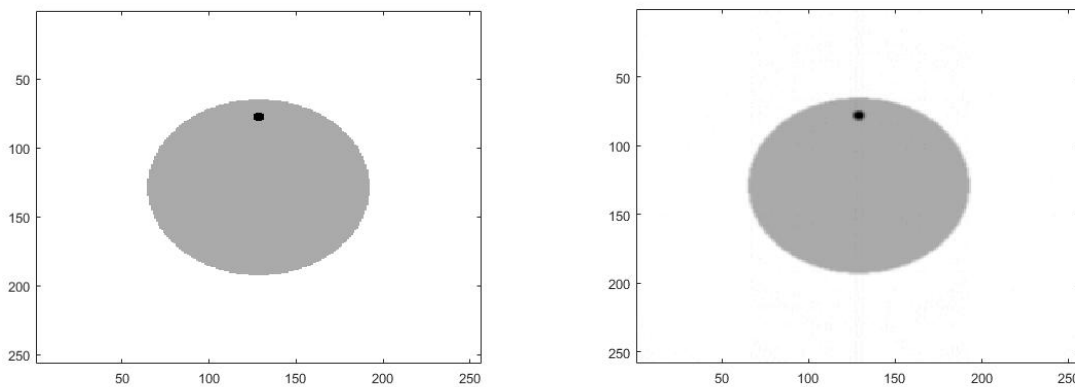


**Figura 7-2.** Retroproyeccion filtrada de un sinograma generado por método suma corregido. Puede observarse que sus dimensiones igualan a la imagen generada al aplicar la FBP al fantoma generado por transformada de Radon.

Al hacer una medición de los errores para saber cuál método de reconstrucción daba una imagen más fiel al fantoma original se obtuvo que, al aplicar la FBP al sinograma por Radon la imagen tenía una diferencia de 0.18 respecto del fantoma original en comparación a una diferencia de 0.26 que se da por la aplicación del algoritmo de FBP al sinograma generado por el método de suma. Una comparación visual se muestra en las figuras 7-2 y 7-3, aunque las diferencias son imperceptibles a la vista.



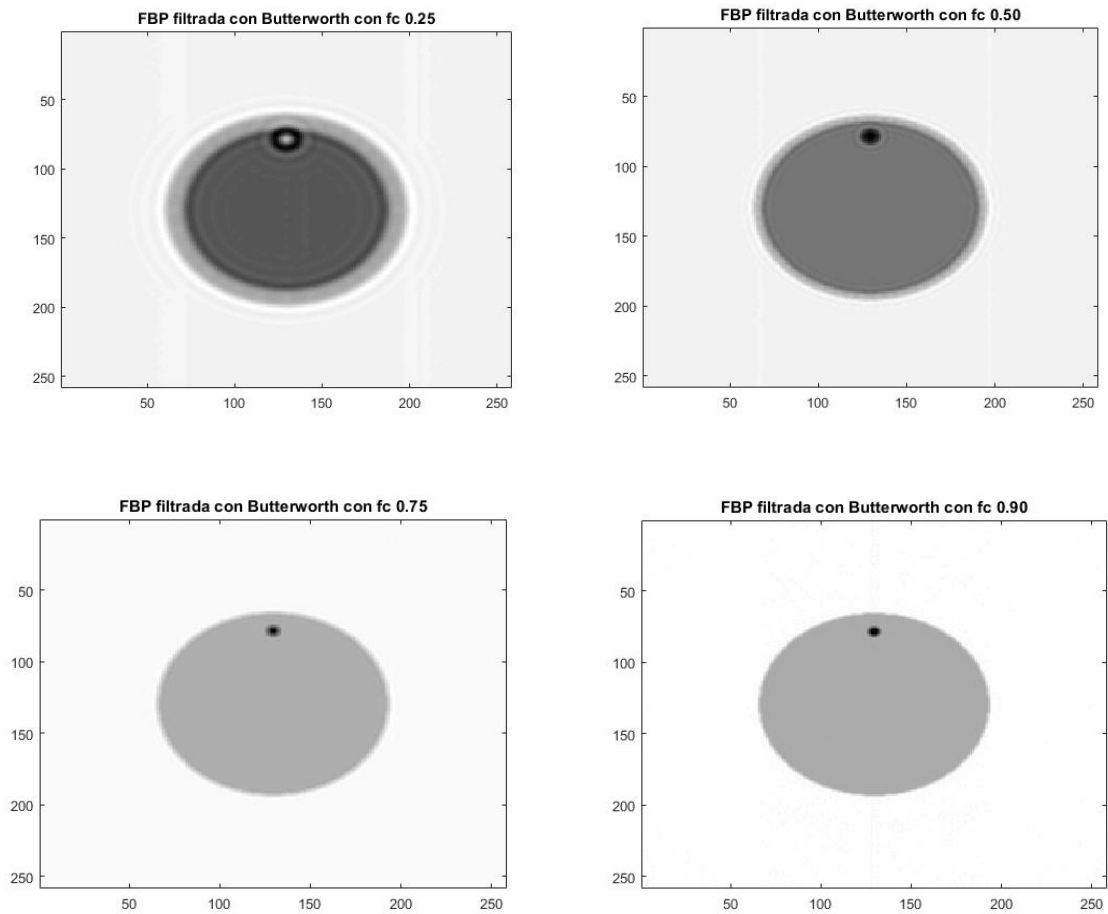
**Figura 7-3.** Fantoma matemático (izquierda) versus imagen obtenida por FBP aplicada al sinograma generado por transformada de Radon (derecha).

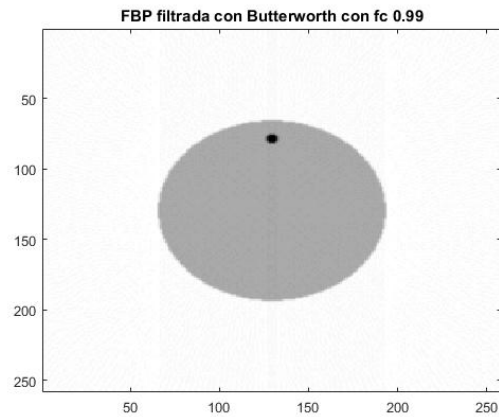


**Figura 7-4.** Fantoma matemático (izquierda) versus imagen obtenida por FBP aplicada al sinograma generado por método suma (derecha).

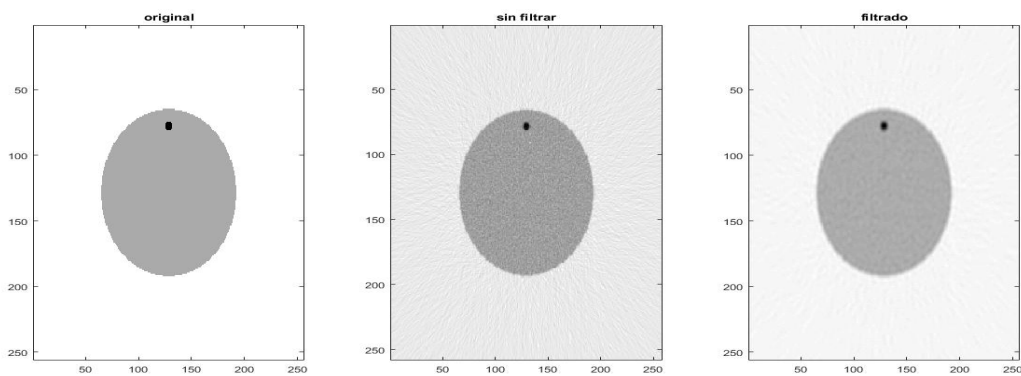
Se aplicó también un filtro externo tipo Butterworth pasa-bajo, como se observa en la figura 7-4. Al realizar la medición de errores se obtuvo una diferencia de la imagen obtenida respecto del fantoma original de 1.58 con una fc de 0.25, 0.59 con una fc de 0.50, 0.28 con una fc de 0.75 y 0.20 con una fc de 0.90. Finalmente se elevó la frecuencia de corte hasta 0.99, con lo cual se disminuyó la diferencia hasta un valor de 0.18, resultando igual que la diferencia existente entre

la retroproyección filtrada sin aplicación de un filtro externo y el fantoma obtenido por transformada de Radon.





**Figura 7-5.** Imágenes obtenidas por FBP aplicada al sinograma generado por transformada de Radon con agregado de filtro Butterworth pasa-bajo.



**Figura 7-6.** Retroproyección filtrada de un sinograma con ruido aplicado, a la derecha la imagen control sin ruido, en el centro la imagen resultado de aplicar ruido de poisson a un sinograma sin filtrado y a la derecha la imagen resultado de aplicar ruido de poisson y un filtro Shepp-Logan con frecuencia de corte 0,4.

Midiendo las diferencias entre las imágenes se obtuvo que entre la imagen sin filtrar y la imagen de control existe una diferencia de 0,2815, y entre la imagen filtrada y la de control hay una diferencia de 0,1164, lo cual indica una mejora en la fidelidad de la imagen aplicando un filtro.

## 8. Conclusión

Al aplicar el algoritmo de retroproyección filtrada a un fantoma matemático, de características conocidas, se puede analizar y obtener, mediante el uso de parámetros adecuados, imágenes con un alto grado de fidelidad que reproducen las características del fantoma matemático original.

Al aplicar la transformada de Radon, con un muestreo angular igual a 360 grados, se obtienen imágenes más exactas del fantoma original que con mayores intervalos de muestreo angular. A mayor número de pasos, o equivalentemente a menor tasa de muestreo angular, se reproduce más fielmente el objeto en estudio.

Al aplicar un filtro externo se puede concluir que, al utilizarlo en una imagen sin ruido se debe emplear una frecuencia de corte máxima, cercana a 1, es decir, la tasa de muestreo de Nyquist, para así minimizar las diferencias respecto del fantoma original. Aplicándolo a una imagen con ruido se debe elegir la frecuencia de corte de acuerdo con las características de la imagen a ser filtrada.

## 9. Bibliografía

Cherry, S., Sorenson, J., Phelps, M. (2012). *Physics un nuclear medicine* (4<sup>a</sup> Ed.). Philadelphia, PA: Saunders Elsevier.

International Atomic Energy Agency. (2013). *Calidad de imagen y controles de calidad*. Vienna, AT.: Vienna International Centre. Recuperado de: <https://rpop.iaea.org>

Pérez, A., Peña, F., López, J., Galli, R. (2005). *Cardiología nuclear, fundamentos y aplicaciones clínicas*. Buenos Aires: Jorge Baudino ediciones.

Pérez, A. (2011). *Imágenes en medicina nuclear* (1<sup>a</sup> Ed). Buenos Aires: UNSAM EDITA.

Solomon, C., Breckon, T. (2011), *Fundamentals of digital image processing, a practical approach with examples in matlab* (1<sup>a</sup> Ed). Hoboken, NJ: Wiley-Blackwell.

The MathWorks, Inc. (2017). *MATLAB® Primer*. Natick, MA: The MathWorks, Inc.